

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**

Е. Б. Боронина

Эта книга написана для студентов технических вузов, желающих подготовиться к экзамену по математическому анализу. Содержание данной книги полностью соответствует программе по курсу «Математический анализ», экзамен по которому предусмотрены в большинстве высших учебных заведений России. Программа помогает быстро и без лишних трудностей найти необходимый ответ на поставленный вопрос. Вопросы составлены автором на основе личного опыта с учетом требований преподавателей.

ЛЕКЦИЯ № 1. Математический анализ функций одной переменной

1. Множества

Понятие **множества** относится к числу первоначальных понятий, которые не определяются через другие, более простые. Вместо слова «множество» иногда говорят «совокупность некоторых предметов, объединенных по какому-нибудь признаку».

Объекты, из которых состоит множество, называют **его элементами** или **точками**. Множества часто обозначают большими, а их элементы — малыми буквами. Если x — элемент множества X , то пишут $x \in X$ (точка x принадлежит множеству X). Если x не является элементом множества X , то пишут $x \notin X$ (x не принадлежит X). Если множество X состоит из элементов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ записывают $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

Пусть X и Y — два множества. Если X и Y состоят из одних и тех же элементов, то пишут $X = Y$. Если в X нет элементов, не принадлежащих Y , то пишут, что $x \subset X$. Если X не содержится в Y , то пишут $x \not\subset X$. В математике часто используется пустое множество. Оно не содержит ни одного элемента и обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество $(-\infty; +\infty)$ называется **числовой прямой**, а любое число — **точкой этой прямой**. Пусть a — произвольная точка числовой прямой и δ — положительное число. Интервал $(a - \delta; a + \delta)$ называется **δ -окрестностью точки a** .

Проколотой δ -окрестностью точки a называется ее **δ -окрестность**, из которой удалена сама точка a .

Точка a называется **внутренней точкой** множества X , если существует δ -окрестность точки a , в которой содержатся только точки множества X .

Точка a называется **граничной точкой** множества X , если в любой δ -окрестности точки a содержатся точки, принадлежащие и не принадлежащие множеству X .

Говорят, что **множество X ограничено сверху (снизу)**, если существует такое число c , что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $x \leq c$ ($x \geq c$). Число c в этом случае называется **верхней (нижней) гранью** множества X . Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется **ограниченным**. Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней ограниченного сверху (снизу) множества называется **точной верхней (нижней) гранью** этого множества.

2. Теорема о вложенных отрезках

Определение. Пусть дана последовательность таких отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, что каждый последующий содержится в предыдущем: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$, т. е. для всех n

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad (1)$$

и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Такая последовательность называется последовательностью вложенных отрезков.

Теорема о вложенных отрезках. Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Доказательство. Из неравенства (1) следует, что левые концы отрезков образуют неубывающую последовательность

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots, \quad (2)$$

а правые концы образуют невозрастающую последовательность

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq \dots, \quad (3)$$

при этом последовательность (2) ограничена сверху, а последовательность (3) ограничена снизу, так как $a_n \leq b_1$, а $b_n \geq a_1$ для любого n . Следовательно, на основании признака сходимости монотонной последовательности эти последовательности имеют пределы

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c', \text{ а } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c''. \text{ Тогда из условия } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c'' - c' = 0 \end{aligned}$$

следует, что $c'' = c'$, т. е. последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют общий предел. Обозначая этот предел буквой C , получаем, что для любого n справедливы неравенства $a_n \leq c \leq b_n$, т. е. точка c принадлежит всем отрезкам последовательности (1).

Докажем теперь, что такая точка только одна. Допустим, что существует еще одна точка $c_1 (c_1 \neq c)$, принадлежащая всем отрезкам последовательности (1). Тогда для любого n должно выполняться неравенство $b_n - a_n \geq |c_1 - c|$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq |c_1 - c|$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема неверна, если вместо отрезков рассматривать интервалы. Например, для последовательности вложенных интервалов

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset (0, 1/4) \supset \dots \supset (0, 1/2^n) \quad (4)$$

не существует точки, принадлежащей всем интервалам. В самом деле, какую бы точку C на интервале $(0, 1)$ ни взять, всегда найдется такой номер N , что при $n > N$ будет $\frac{1}{2^n} < c$ и, следовательно, точка C не будет принадлежать интервалам последовательности (4), начиная с интервала $\left(0, \frac{1}{2^{N+1}}\right)$.

3. Числовые последовательности

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \dots, n$ поставлено в соответствие вещественное число x_n , то множество вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

называют **числовой последовательностью** или просто последовательностью.

Числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ называются **элементами** (или **членами**) последовательности (1), символ x_n — **общим элементом** последовательности, а число n — **его номером**. Сокращенно последовательность (1) обозначается символом $\{x_n\}$.

Последовательность задана, если указан способ получения любого ее элемента. Например, формула $x_n = 1 + (-1)^n$ задает последовательность:

$$0, 2, 0, 2, \dots$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует такое число M (число m), что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. существуют числа m и M такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$ (т. е. $x_n > A$, либо $x_n < -A$).

Примеры

1. Последовательность $1, 2, 3, \dots, n$ ограничена снизу, но неограничена сверху.

2. Последовательность $-1, -2, -3, \dots, -n$ ограничена сверху, но неограничена снизу.

3. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ ограничена, так как любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам: $0 \leq x_n \leq 1$ ($m = 0, M = 1$).

4. Последовательность $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n$ неограниченная. В самом деле, каково бы ни было число A среди элементов x_n этой последовательности, найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если она становится и остается, начиная с некоторого номера N , по абсолютной величине больше любого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа A .

Символическая запись определения бесконечно большой последовательности:

$$(\forall A > 0)(\exists N)(\forall n > N): |x_n| > A.$$

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если она становится и остается, начиная с некоторого номера N , по абсолютной величине меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε .

Символическая запись определения бесконечно малой последовательности:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) : |x_n| < \varepsilon.$$

Теорема. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и, наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, т. е.

$$(\forall \varepsilon = \frac{1}{A} > 0) (\exists N)(\forall n > N) : |x_n| > \frac{1}{A}$$

или

$$(\forall \varepsilon = \frac{1}{A} > 0), (\exists N)(\forall n > N) : \frac{1}{|x_n|} < A$$

т. е. $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Доказательство второй части проводится аналогично.

4. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Критерий Коши

Определение 1. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

С помощью логических символов это определение можно записать в виде:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N)(\forall n > N) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет своим пределом число a , то символически это записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ или } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Последовательность, не являющаяся сходящейся, называется **расходящейся**.

Определение 2. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет **условию Коши**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех номеров n и m , удовлетворяющих условию $n \geq N$ и $m \geq N$, справедливо неравенство:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (3)$$

Условие (3) можно сформулировать и таким образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех номеров $n \geq N$ и всех целых неотрицательных p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \quad (4)$$

Для того, чтобы убедиться в равносильности условий (3) и (4), достаточно положить $p = n - m$, если $n \geq m$ и $p = m - n$, если $n < m$.

Последовательности, которые удовлетворяют условию Коши, называют также **фундаментальными**.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$, $k = 1, 2, \dots$ — **подпоследовательность последовательности** $\{x_n\}$, если $(\forall k)(\exists N): y_k = x_N$, причем $(n_{k_1} < n_{k_2}) \Leftrightarrow (k_1 < k_2)$. Последовательность $\{y_k\}$ обозначается в этом случае так же $\{x_n\}$.

Теорема (Больцано—Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема (критерий Коши). Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

Доказательство. Докажем **необходимое** условие. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Зададим $\varepsilon > 0$, тогда согласно определению предела последовательности существует такой номер N , что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$.

Пусть теперь $n \geq N$ и $m \geq N$, тогда

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + \\ &+ |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполняется условие Коши.

Докажем **достаточное** условие. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех номеров n и m , удовлетворяющих условию $n \geq N$ и $m \geq N$, справедливо неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 0$, тогда существует такое N_1 , что $|x_n - x_m| < 1$ при $n \geq N_1$ и $m \geq N_1$.

В частности, если $n \geq N_1$ а $m = N_1$, то $|x_n - x_{N_1}| < 1$, т. е. $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$ при $n \geq N_1$. Это и значит, что последовательность $\{x_n\}$ при $n = N_1, N_1+1, \dots$ ограничена. А это значит, что по теореме Больцано-Вейерштрасса существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Покажем что и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению последовательности существует такое K , что

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

для всех $k \geq K$.

Причем согласно определению последовательности неравенство (5) выполняется для всех $n_k \geq n_K$.

Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое N , что $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N$ и всех $m \geq N$.

Положим $N_\varepsilon = \max\{N, n_k\}$ и зафиксируем некоторое $n_k > N_\varepsilon$. Тогда для любого $n_k > N_\varepsilon$ получим:

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

а это и доказывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Теорема доказана.

5. Определение и признак сходимости монотонной последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если $x_n < x_{n+1}$ для всех n ; **неубывающей** — если $x_n \leq x_{n+1}$ для всех n ; **убывающей** — если $x_n > x_{n+1}$ для всех n ; **невозрастающей** — если $x_n \geq x_{n+1}$ для всех n .

Все такие последовательности объединяются одним общим названием: **монотонные последовательности**. Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

Примеры

1. Последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ убывающая и ограниченная.
2. Последовательность $1, \frac{1,1}{2,1}, \frac{2,1}{3,1}, 3, \dots, \frac{1}{n}$ невозрастающая и ограниченная.
3. Последовательность $1, 2, 3, \dots, n$ возрастающая и неограниченная.
4. Последовательность $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n$ неубывающая и неограниченная.

5. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}$ возрастающая и ограниченная.

Монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны: неубывающие последовательности — снизу ($x_n \geq x_1$ для всех n), невозрастающие — сверху ($x_n \leq x_1$ для всех n). Оказывается, что если монотонная последовательность ограничена с обеих сторон, т. е. просто ограничена, то она сходится. Немонотонные последовательности этим свойством не обладают. Например, немонотонная последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не сходится.

Определение. Верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности $\{x_n\}$ называется **верхней (нижней) гранью** этой последовательности и обозначается $\sup\{x_n\}$ или $\sup_{n=1, 2, \dots} x_n$ (и соответственно $\inf\{x_n\}$ или $\inf_{n=1, 2, \dots} x_n$).

Если верхняя (нижняя) грань является числом, то это определение можно сформулировать следующим образом.

Число a является верхним (нижним) пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n = 1, 2, \dots$ если:

- 1) $x_n \leq a$ (соответственно $x_n \geq a$) для всех n ;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε , что $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$ (соответственно $x_{n_\varepsilon} > a + \varepsilon$).

Теорема. Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (монотонно убывающая) последовательность имеет предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$).

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. В силу последнего условия она имеет конечную верхнюю грань $\sup\{x_n\} = a$. Покажем, что $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$,

зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из того что $a = \sup\{x_n\}$, следует, что $x_n < a$ для всех номеров $n = 1, 2, \dots$ и существует такой номер n_ε , что $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Тогда в силу монотонности заданной последовательности для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ имеем $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$

Поэтому $a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n a$ для всех $n \geq n_\varepsilon$, что и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Теорема доказана полностью.

Аналогично доказывается существование предела для ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности.

Следствие. Для того, чтобы монотонно возрастающая последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

Аналогичное утверждение справедливо для монотонно убывающей последовательности.

ЛЕКЦИЯ № 2. Функции одной переменной

1. Функции $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$.

Пусть $X = \{x\}$ и $Y' = \{y\}$ — два числовых множества.

Определение 1. Если каждому значению $x \in X$ по некоторому правилу (закону) f поставлено в соответствие одно определенное число y из множества Y' , то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Множество X называется **областью определения** функции, а множество $Y \subset Y'$ всех ее значений — **областью изменения** функции.

Переменная x называется **независимой переменной**, или **аргументом**, а переменная y — **зависимой переменной**.

Наряду с термином «функция» используют однозначный термин «отображение», а вместо записи $y = f(x)$ пишут $f : x \rightarrow y$.

Способы задания функции

Задать функцию f — значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение $f(x)$. Существует три основных способа задания функций: аналитический, табличный и графический.

1. Аналитический способ. Если функция определена одной или несколькими формулами на различных промежутках изменения аргумента x , то говорят, что функция задана аналитическим способом.

При таком задании функции в формулах указывается, какие операции (действия) и в каком порядке надо произвести над значением x и постоянными величинами, чтобы получить соответствующее значение y .

2. Табличный способ. Функцию можно задать с помощью таблицы, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции. С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Таблицы часто используют для задания функций. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и многие другие.

3. Графический способ. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$. Функция $y = f(x)$ называется **заданной графически**, если построен ее график. Такой способ задания функции дает возможность определять значение функции только приближенно, так как построение графика и нахождение на нем значений функции сопряжено с погрешностями.

Из трех рассмотренных способов задания функции основным является аналитический способ.

Классификация функций

Постоянная функция $f(x) = C$, $C = \text{const}$, степенная функция x^α (α — любое число), показательная функция a^x ($0 < a \neq 1$), логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$, $x > 0$), тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции называются **простейшими (элементарными) функциями**.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс элементарных функций.

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1. Функция вида

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m,$$

где $m \geq 0$ — целое число; коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ ($a \neq 0$) — любые числа, называется **целой рациональной функцией** или **алгебраическим многочленом степени m** . Многочлен первой степени называется также линейной функцией.

2. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n},$$

называется **дробно-рациональной функцией**. Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс рациональных функций.

3. Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется иррациональной функцией.

Например,

$$f(x) = \sqrt{(5x^2 + 4x - 7)/(3x^2 - 8x + 4)} + (\sqrt[3]{x} + x)^3$$

4. Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется **трансцендентной функцией**, например $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin x + x$ и т. д.

2. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть точка $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$. Возьмем из X последовательность точек, отличных от x_0 :

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

сходящуюся к x_0 . Значения функции в точках этой последовательности тоже образуют последовательность:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \quad (2)$$

и можно ставить вопрос о существовании ее предела.

Определение предела по Гейне. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности (1) значений аргумента x , отличных от x_0 , соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к числу A .

Символически это записывается так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Из этого определения следует, что функция в данной точке может иметь лишь одно значение предела.

Определение предела по Коши. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение частичного предела. Число A называется **правым (левым) пределом** функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любой сходя-

щейся к x_0 последовательности (1), элементы x_n которой больше (меньше) x_0 , соответствующая последовательность (2) сходится к A .
Символическая запись:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \quad (\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A).$$

Пределы слева и справа функции также называются **односторонними**.

Теорема 1. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции $f(x)$ в точке x_0 .

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 , и функции $f(x)$, $h(x)$ имеют в точке x предел равный A , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A.$$

Пусть, кроме того, выполняются неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\} (x \neq x_0)$ — произвольная сходящаяся к x_0 последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $h(x)$. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ значений этих функций имеют предел, равный A , т. е. $f(x_n) \rightarrow A$, $h(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Используя неравенства, данные в условии теоремы, можно записать:

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n).$$

Отсюда по теореме о предельном переходе в неравенствах следует, что $g(x_n) \rightarrow A$. Согласно определению 1 предела функции это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$

Теорема полностью доказана.

3. Два замечательных предела

Первый замечательный предел. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

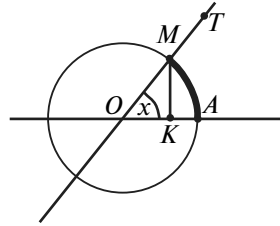


Рис. 1

Рассмотрим дугу окружности радиуса $R = 1$ с центральным углом, радианная мера которого равна x ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). Точка O — центр окружности, прямые OM и OA образуют стороны угла x , точки M и A лежат на единичной окружности, MK — перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую OA , точка T принадлежит прямой OM и лежит за пределами окружности (рис. 1).

Тогда $OA = 1$,

$$\sin x = MK, \operatorname{tg} x = AT. \quad (1)$$

Очевидно, что площадь треугольника OAM меньше площади сектора OAM , которая меньше площади треугольника OAT , или,

что то же самое, $\left(\frac{1}{2}\right)OA \times MK < \left(\frac{1}{2}\right)OA \times \overset{\sim}{AM} < \left(\frac{1}{2}\right)OA \times AT$. Принимая во внимание равенства (1), последнее соотношение можно записать в виде $(1/2) \sin x < (1/2)x < (1/2) \operatorname{tg} x$, откуда получаем:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Разделив эти неравенства на $\sin x$, получим $1 > (\sin x)/x > \cos x$, откуда находим: $0 > 1 - (\sin x)/x > 1 - \cos x$. Так как $\sin(x/2) < 1$, то $\sin^2(x/2) < \sin(x/2)$. Поэтому, учитывая первое неравенство (2), для всех x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \pi/2$, получаем $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2) < 2 \sin(x/2) < 2(x/2) = x$.

Итак,

$$0 > 1 - (\sin x)/x > x$$

при $0 < x < \pi/2$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x < \delta$, будет выполняться неравенство $x < \varepsilon$, поэтому $0 < 1 - (\sin x)/x < \varepsilon$, откуда $|1 - (\sin x)/x| < \varepsilon$.

Это означает, что 1 является правым пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Заметим теперь, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ четная, так как $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$. Поэтому и левый предел функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ равен 1, а значит,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Как известно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Пусть $x > 1$. Положим $n = [x]$; тогда

$$x = n + \alpha,$$

где n — натуральное число, а α удовлетворяет условию $0 \leq \alpha < 1$.

Так как $n \leq x < n + 1$, $1/(n + 1) < x < 1/n$, то

$$(1 + 1/(n+1))^n < (1 + 1/x)^n < (1 + 1/n)^{n+1}.$$

При $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n) = e \times 1 = e$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/(n+1))^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/(n+1))^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/(n+1))} = \frac{e}{1} = e.$$

Отсюда по теореме о двух пределах получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть теперь $x < -1$; положим $x = -y$.

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \times 1 = e \end{aligned}$$

Объединяя два случая, окончательно имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4. Критерий Коши существования предела функции

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, $x = a$. Будем говорить, что $f(x)$ при $x \rightarrow a$ удовлетворяет **условию Коши**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ для любых $|x - a| < \delta$, $|x' - a| < \delta$ и $x \neq a$, $x' \neq a$.

Теорема (критерий) Коши. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x \rightarrow a$, где a либо число x_0 , либо один из символов $\infty, +\infty, -\infty, x_0 + 0, x_0 - 0$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию Коши при $x \rightarrow a$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, где A — число. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, что $|x - a| < \delta$ при $x \neq a$ верно $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пусть $|x - a| < \delta, |x' - a| < \delta$ при $x \neq a, x' \neq a$, тогда в силу предыдущего неравенства

$$|f(x') - f(x)| = |f(x') - A + A - f(x)| \leq |f(x') - A| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

т. е. условие Коши выполняется.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$

Покажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ сходится.

Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Согласно условию Коши существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $|x - a| < \delta, |x' - a| < \delta$ и $x \neq a, x' \neq a$ выполняется неравенство

$$|f'(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В силу того что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$ для окрестности существует такой номер n_ε , что $|x_n - a| < \delta$ при $n \geq n_\varepsilon$, поэтому при любых $n \geq n_\varepsilon$ и $m \geq n_\varepsilon, |x_n - a| < \delta$ и $|x_m - a| < \delta$ а следовательно, получаем $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, т. е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Коши для последовательностей и поэтому сходится к некоторому числу $B \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$.

Покажем теперь, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$, какова бы ни была другая такая последовательность $\{x'_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = a, x \neq a, n = 1, 2, 3, \dots$. Действительно, образуем новую последовательность:

$$x'_n = \begin{cases} x_n, & \text{если } n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots \\ x''_n, & \text{если } n = 2k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = a, x''_n \neq a$, для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Поэтому по доказанному существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = a$, а так как предел любой сходящейся последовательности совпадает с пределом ее подпоследовательности, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Таким образом, согласно определению предела функции $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$.

Критерий Коши доказан.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Бесконечно малые функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке $x = x_0$ (или при $x \rightarrow x_0$), если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется равенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема 1. Для выполнения равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Рассмотрим разность $\alpha(x) = f(x) - A$ и покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно ма-

лая функция при $x \rightarrow x_0$. Действительно, пределы каждой из функций $f(x)$ и A при $x \rightarrow x_0$ равны A , поэтому верно следующее:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} A = \\ &= A - A = 0.\end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $\alpha(x) = f(x) - A$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. Покажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Так как $f(x) = A + \alpha(x)$, то

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha(x) + A] = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} A = \\ &= A + A = 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые последовательности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow x_0$, а также произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции являются бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow x_0$.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x \rightarrow x_0$ справедливо и для бесконечно малых функций при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$.

Бесконечно большие функции

Определение 3. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

В этом случае пишут: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$ или что она имеет предел в точке $x = x_0$.

Рассмотрим правила сравнения бесконечно малых функций.

Пусть при $x \rightarrow x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми. Тогда:

- 1) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (говорят также, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$, при $x \rightarrow x_0$);

2) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A — число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бес-

конечно малые одного порядка;

3) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные бес-

конечно малые. Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

В некоторых случаях недостаточно знать, что одна из двух бесконечно малых является бесконечно малой более высокого порядка, чем другая. Нужно еще оценить, как высок этот порядок. Поэтому вводится следующее правило;

4) если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая n -го

порядка относительно $\beta(x)$.

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Функции $\alpha(x) = (1+x)/x$ и $\beta(x) = 1/x$ являются при $x \rightarrow 0$ эквивалентными бесконечно большими, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1.$$

В этом случае говорят также, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок роста при $x \rightarrow 0$.

2. Функция $\alpha(x) = x^2 + 4$ является при $x \rightarrow \infty$ бесконечно большей более низкого порядка, чем $\beta(x) = x^3 - 2$ (имеет менее высокий порядок роста), так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/x^2}{1 - 2/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3. Бесконечно большие при $x \rightarrow \infty$ функции $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ и $\beta(x) = x^3 - 1$ имеют одинаковый порядок роста, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/x^2}{1 - 1/x^2} = 2.$$

4. Функция $\alpha(x) = x^4 + x + 1$ является при $x \rightarrow 0$ бесконечно большой второго порядка по отношению к бесконечно большой $\beta(x) = x^2 + 1$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x + 1}{x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/x^3 + 1/x^4}{1 + 2/x^2 + 1/x^4} = 1.$$

6. Непрерывность в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема об устойчивости знака непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) > 0$. Тогда в силу второго определения непрерывности функции для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, или, что то же самое, выполняются неравенства: $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Возьмем $\varepsilon = f(x_0)$. Тогда из левого неравенства получаем $f(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что и требовалось доказать.

Если же $f(x_0) < 0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$. Так как $-f(x) > 0$, то по доказанному существует δ -окрестность точки x_0 , в которой $-f(x) > 0$ и, следовательно, $f(x) < 0$.

Теорема доказана полностью.

Определение 3. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Разрывы функций классифицируются следующим образом.

Разрыв первого рода. Точка x_0 называется точкой **разрыва первого рода** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x).$$

Пример

Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, так как $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \operatorname{sgn} = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \operatorname{sgn} = -1$.

Разрыв второго рода. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Пример

Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} (1/x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} (1/x) = -\infty.$$

Устранимый разрыв. Точка называется **устралимой точкой разрыва** функции $f(x)$, если в этой точке

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x_0).$$

Пример

Для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва, так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0).$$

Сложная функция

Определение 4. Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z , а на множестве значений $y = f(z)$ определена функция $y = f[\varphi(x)]$, то функция называется **сложной функцией** от x , а переменная z — промежуточной переменной сложной функции.

Пример

Функция $y = \sin^2 x$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, так как $y = f(z) = \sin z$, $z = \varphi(x) = x^2$.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Возьмем из X любую последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ сходящуюся к точке x_0 . Тогда в силу непрерывности функции $z = \varphi(x)$ в точке x_0 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = z_0$, т. е. соответствующая последовательность точек $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ сходится к точке z_0 . В силу же непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0), \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)].$$

Следовательно, предел функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 равен ее значению в этой точке, что и доказывает непрерывность сложной функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 .

Теорема доказана.

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$ (на полуинтервале $[a, b)$) и $x_0 \in (a, b]$ ($x_0 \in [a, b)$). Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева (справа)** в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \text{ (если } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)).$$

7. Непрерывность на промежутке

Определение 1. Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется функцией, **непрерывной на отрезке**.

При этом под «непрерывностью в точке a » понимается непрерывность справа, а под «непрерывностью в точке b » — непрерывность слева.

Теорема (первая теорема Больцано—Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.

Теорема (вторая теорема Больцано—Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a) = A, f(b) = B$. Далее пусть C — любое число, заключенное между A и B . Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка C , что $f(c) = C$.

Другими словами, непрерывная функция при переходе от одного значения к другому принимает и все промежуточные значения.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она является ограниченной на этом отрезке.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Функция $f(x)$, непрерывная в точке x_0 , является ограниченной в некоторой ее окрестности.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$; тогда согласно второму определению непрерывности в точке для данного ε существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство: $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Используя это неравенство, получаем:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)| \end{aligned}$$

т. е. $|f(x)| < M$, где $M = 1 + |f(x_0)|$. Отсюда заключаем, что функция ограничена в δ -окрестности точки x_0 .

Доказательство теоремы. Предположим обратное, т. е. допустим, что функция $f(x)$ является неограниченной на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда по крайней мере на одном из двух полученных отрезков функция $f(x)$ неограничена (в противном случае она была бы ограничена на $[a, b]$). Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот отрезок, на котором функция $f(x)$ неограничена. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем по

следовательность $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots$ вложенных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ неограниченна, причем

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме о вложенных отрезках существует точка C , принадлежащая всем отрезкам. Функция $f(x)$ по условию определена и непрерывна в точке C , следовательно, согласно доказанной лемме в некоторой окрестности точки C она является ограниченной. При достаточно большом n в эту окрестность попадает отрезок $[a_n, b_n]$, на котором функция $f(x)$ также ограничена. Но это противоречит тому, что $f(x)$ является неограниченной на каждом из вложенных отрезков. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих точных граней, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по предыдущей теореме она ограничена на этом отрезке. Следовательно, существует точная верхняя M и точная нижняя m грани функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Покажем, что функция $f(x)$ достигает M , т. е. существует такая точка $x_1 \in [a, b]$, что $f(x_1) = M$. Будем рассуждать от противного. Пусть функция $f(x)$ не принимает ни в одной точке $[a, b]$ значения, равного M . Тогда для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную повсюду положительную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Функция $F(x)$ непрерывна как частное двух непрерывных функций. В этом случае, согласно предыдущей теореме, функция

$F(x)$ является ограниченной, т. е. найдется положительное число μ такое, что для всех $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \mu,$$

откуда

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}.$$

Таким образом, число $M - \frac{1}{\mu}$, меньшее, чем M , является верхней гранью $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Но это противоречит тому, что число M является точной верхней, т. е. наименьшей верхней, гранью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Это противоречие и доказывает, что существует точка $x_1 \in [a, b]$, что $f(x_1) = M$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a, b]$ своей точной нижней грани m .

К числу других свойств функции, непрерывной на отрезке, относится очень важное свойство, называемое равномерной непрерывностью.

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на некотором промежутке X , и пусть $x_0 \in X$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то согласно второму определению непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Ясно, что δ зависит от ε , но δ зависит также и от x_0 . При изменении x_0 в пределах рассматриваемого промежутка (при постоянном ε) число δ будет различным для разных x_0 .

Возникает вопрос, существуют ли непрерывные функции, определенные на некоторых промежутках, для которых по любому $\varepsilon > 0$ находилось бы $\delta > 0$, не зависящее от x , т. е. δ было бы общим для всех x из рассматриваемого промежутка. Это приводит к понятию равномерной непрерывной функции.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **равномерно-непрерывной на промежутке** X , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Из определения следует, что равномерно-непрерывная функция на X является непрерывной на этом промежутке.

Теорема Кантора. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ значит, она равномерно-непрерывна на этом отрезке.

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

Функция $f(x)$, определенная на числовом множестве E , называется **строго монотонно возрастающей (убывающей)**, если для таких любых двух чисел $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Определение 3. Пусть X и Y — некоторые множества и пусть задана функция f , т. е. множество пар чисел (x, y) ($x \in X, y \in Y$), в котором каждое число x входит в одну и только одну пару, а каждое число y — по крайней мере в одну пару. Если в каждой паре этого множества числа x и y поменять местами, то получим множество пар чисел (y, x) , которое называется **обратной функцией** к функции f .

Обратную функцию будем обозначать символом $x = \varphi(y)$.

Теорема (о непрерывности обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и пусть Y — множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x = \varphi(y)$ однозначна, строго монотонна и непрерывна.

8. Производная и дифференциал

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X , возьмем точку $x_0 \in X$ и дадим аргументу этой точки приращение $\Delta x \neq 0$ ($x_0 + \Delta x \in X$), получим приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. Разделим приращение функции Δy на приращение аргумента Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

Если предел (1) существует, то он называется **производной данной функции** в точке x_0 и обозначается $f'(x)(x)$.

Если для некоторого значения x_0 существует бесконечный предел, то говорят, что при $x = x_0$ существует бесконечная производная.

Операция нахождения производной от функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием** этой функции.

Определение 2. Правой (левой) производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется правый (левый) предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ (при условии, что этот предел существует).

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0 . Тогда функции $y_1 = f(x) + g(x)$, $y_2 = f(x) - g(x)$, $y_3 = f(x)g(x)$, $y_4 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (при $g(x) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0 , которые выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \\ y_2'(x) &= (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x), \\ y_3'(x) &= (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ y_4'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$, а функция $z = F(y)$ имеет производную в точке $y = y_0$, тогда функция $G(x) = F(y)$ имеет производную при $x = x_0$, равную:

$$G'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0).$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , называется **дифференцируемой** в точке x_0 , если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (2)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx ;

$\alpha(\Delta x)$ — функция аргумента Δx , являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Свойства дифференцируемых функций.

Теорема 3. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0 , то она и непрерывна в этой точке.

Определение 4. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке и обозначается $df(x_0)$ или dy , т. е. $dy = A\Delta x$.

Следствие (из теоремы 1). Теорема 1 переносится и на дифференциалы функций, при условии их дифференцируемости в точке x_0 :

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x),$$

$$d(f(x) - g(x)) = df(x) - dg(x),$$

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{(g(x))^2}.$$

Следствие (из теоремы 2, инвариантность дифференциала). Произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной не зависит от того, является эта переменная независимой переменной или функцией.

$$dz = F'(y_0)dy = G'(x_0)dx.$$

Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и в некоторой точке $c \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в точке c существует конечная производная, то она равна нулю.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) имеет конечную производную хотя бы на интервале (a, b) ;
- 3) на концах отрезка принимает равные значения, т. е. $f(a) = f(b)$, то в интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c , в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает на нем наибольшее M и наименьшее m значения ($m \leq f(x) \leq M$).

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $M = m$. Отсюда при любых значениях $x \in [a, b]$, $f(x) = m$, т. е. $f(x) = \text{const}$ на отрезке $[a, b]$. Следовательно, $f'(x) = 0$ на этом отрезке. Поэтому в качестве точки c , в которой производная функции будет равна нулю, можно взять любую точку, лежащую между a и b .

2. Пусть $M > m$, тогда функция на концах отрезка оба значения принимать не может, так как по условию теоремы значения функции на концах отрезка $[a, b]$ равные. Следовательно, хотя бы

одно из значений m или M функция принимает внутри отрезка в некоторой точке c , лежащей между a и b .

Например, пусть в точке c функция $f(x)$ имеет наибольшее значение $f(c) = M$.

Таким образом, функция $f(x) = m$ в точке $c \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение и в этой точке по условию существует конечная производная $f'(c)$, следовательно, по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Теорема доказана полностью.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную хотя бы в интервале (a, b) , то в этом интервале найдется по крайней мере одна такая точка c , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad a < c < b. \quad (3)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$, определив ее равенством:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \quad (4)$$

Рассмотрим ее свойства.

1. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как алгебраическая сумма непрерывных функций. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна по условию, а функция $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$ есть линейная функция вида $y = Ax + B$, поэтому она непрерывна.

2. Функция имеет конечную производную хотя бы в интервале (a, b) , найдем ее:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (5)$$

3. На концах отрезка функция принимает равные значения. Действительно, если подставим в равенство (4) $x = a$ и $x = b$, то получим $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Таким образом, вспомогательная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля, следовательно, в интервале

(a, b) существует по крайней мере одна точка c , в которой производная функции $f'(c)$.

Подставим в равенство (5) $x = c$, получим:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

отсюда

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a < c < b).$$

Теорема доказана.

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$:

- 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;
- 2) имеет производные в каждой точке интервала (a, b) ;
- 3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Тогда существует точка $c, c \in (a, b)$, такая что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

9. Производные и дифференциалы высших порядков

Назовем $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Определение 1. Производная от производной некоторой функции называется производной второго порядка (или второй производной) этой функции. Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и т. д. Производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков**.

Вспоминая определение производной, определение n -ой производной в точке x_0 можно записать в виде предела:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отметим: когда говорится, что функция f имеет в точке x_0 производную порядка n , т. е. существует $f^{(n)}(x_0)$, то отсюда следует,

в силу определения производной, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существуют все производные низших порядков $k < n$, в частности, сама функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **n раз непрерывно дифференцируемой** на некотором промежутке, если на этом промежутке существует $f^{(n)}(x_0)$ — производная порядка n функции $f(x)$ и эта производная непрерывна.

Формула Лейбница

Пусть $y = uv$, где u и v — некоторые функции от переменной x , имеющие производные любого порядка. Тогда

$$\begin{aligned}y' &= u'v + uv', \\y'' &= u^{(2)}v + 2u'v' + uv^{(2)}, \\y''' &= u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u'v^{(2)} + uv^{(3)}.\end{aligned}$$

Правые части равенств похожи на разложения различных степеней бинома $(u + v)^n$ по формуле Ньютона, вместо показателей степени стоят числа, определяющие порядок производных, а сами u и v для полной аналогии с формулой Ньютона нужно рассматривать как производные нулевого порядка: $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$. Учитывая это, запишем общий вид n -й производной произведения двух функций:

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + \\&+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

Эта формула называется **формулой Лейбница**.

Рассмотрим дифференциалы высших порядков. Для удобства будем наряду с обозначениями дифференциалов символами dy и dx использовать обозначения δy и δx .

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка, тогда ее дифференциал $dy = f'(x)dx$, который назовем **дифференциалом первого порядка**, является функцией двух переменных — аргумента x и его дифференциала dx . Пусть функция $f'(x)$, в свою очередь, дифференци-

руема в некоторой точке x . Будем рассматривать dx в выражении для dy как постоянный множитель. Тогда функция dy представляет собой функцию только аргумента x , а ее дифференциал в точке x имеет вид:

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx] = [f'(x)dx]' \delta x = f''(x)dx \delta x.$$

Дифференциал $\delta(dy)$ от дифференциала dy в точке x , взятый при $\delta x = dx$, называется **дифференциалом второго порядка** функции $f(x)$ в точке x и обозначается d^2y , т. е. $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2y)$ от дифференциала d^2y , взятый при $\delta x = dx$, называется дифференциалом третьего порядка функции $f(x)$ и обозначается d^3y и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$, взятый при $\delta x = dx$, называется **дифференциалом n -го порядка** функции $f(x)$ и обозначается $d^n y$.

Докажем, что для n -го дифференциала функции справедлива формула:

$$d^n y = y^{(n)}(x)(dx)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 1$ и $n = 2$ формула доказана. Пусть она верна для дифференциалов порядка $n - 1$:

$$d^{n-1}y = y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1},$$

а функция $y^{(n-1)}(x)$, в свою очередь, дифференцируема в некоторой точке x . Тогда

$$\begin{aligned} d^n y &= \delta(d^{n-1}y) = \delta[y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}] = \\ &= [y^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]' \delta x = y^{(n)}(x) \delta x (dx)^{n-1} \end{aligned}$$

Полагая $\delta x = dx$, получаем

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx} = y^{(n)}(x)(dx)^n,$$

что и требовалось доказать.

10. Признаки монотонности, экстремумы, максимумы, минимумы, выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Асимптоты графика функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **монотонно возрастающей (убывающей)** на некотором множестве X , если для любой пары чисел x_1 и x_2 , принадлежащих этому множеству, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Теорема 1. Пусть функция непрерывна на интервале (a, b) и имеет на нем конечную производную, тогда:

- 1) если производная $f'(x) > 0$ на интервале (a, b) , то функция возрастает в этом интервале;
- 2) если производная $f'(x) < 0$ на интервале (a, b) , то функция убывает в этом интервале.

Доказательство. Для случая 1) возьмем на интервале (a, b) любые два значения x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) и применим теорему Лагранжа, получим:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \quad (x_1 < c < x_2).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$ и по условию $f'(c) > 0$ ($c \in (a, b)$), то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Это и означает, что функция возрастает на интервале.

Для случая 2) теорема доказывается аналогично.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает, если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 убывает.

Доказательство. По определению производной имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Если $f'(x_0) > 0$, то для достаточно близких к x_0 значений x будет выполняться равенство:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Отсюда следует, что если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, и если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, т. е. функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает. Аналогично

ными рассуждениями доказывается, что если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 убывает.

Теорема доказана.

Определение 2. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **максимум** $f(x_0)$, если в некоторой окрестности этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0). \quad (1)$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **минимум** $f(x_0)$, если в некоторой окрестности этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство:

$$f(x) > f(x_0). \quad (2)$$

Таким образом, поведение функции рассматривается в окрестности точки x_0 , и при выполнении условия (1) говорят, что функция в точке x_0 имеет локальный (местный) максимум, а при выполнении (2) — локальный минимум.

Максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**. Точка, в которой функция имеет минимум или максимум, называется **точкой экстремума** функции.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет экстремум и в этой точке существует конечная производная, то она равна нулю.

Доказательство. По условию функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум (минимум), т. е. на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ в точке x_0 функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, и в этой точке существует конечная производная, следовательно, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

Достаточные условия экстремума

Первое правило. Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если с минуса на плюс, то минимум; если знака не меняет, то экстремума нет.

Второе правило. Пусть x_0 есть стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$, и существует вторая производная в этой точке $f''(x_0)$, тогда:

1) если вторая производная $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция имеет минимум;

- 2) если $f''(x_0) < 0$, то — максимум;
 3) если $f''(x_0) = 0$, то вопрос остается открытым, и для его решения надо применить первое правило.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$, тогда $f'(x)$ в точке x_0 есть функция возрастающая (по теореме 2), т. е. если $x < x_0$, то $f'(x) < f'(x_0) = 0$, если $x > x_0$, то $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Итак, при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке x_0 функция имеет минимум.

Пусть $f''(x_0) < 0$, тогда $f'(x)$ в точке x_0 есть функция убывающая, т. е. в окрестности точки x_0 выполняются условия:

- если $x < x_0$, то $f'(x) > f'(x_0) = 0$,
 если $x > x_0$, то $f'(x) < f'(x_0) = 0$.

Производная меняет знак с плюса на минус, значит, в точке x_0 функция имеет максимум.

Определение 3. Кривая обращена вогнутостью вверх (**вогнутость**) на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат выше ее касательной на этом интервале.

Кривая обращена вогнутостью вниз (**выпуклость**) на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Определение 4. Точка $M(x_0, y_0)$ называется **точкой перегиба**, если в некоторой окрестности точки x_0 при $x < x_0$ вогнутость кривой направлена в одну сторону, а при $x > x_0$ — в другую сторону. Иначе говоря, точка $M(x_0, y_0)$, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Заметим, что кривая пересекает касательную в точке перегиба и переходит с одной ее стороны на другую.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вторую производную $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ вогнута.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вторую производную $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ выпукла.

Теорема 3. Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M(x_0, y_0)$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Доказательство. Если вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то на кривой совершается переход от точек вогнутости к точкам выпуклости, и, наоборот, если вторая производная меняет знак с минуса на плюс, то на кривой переходим от точек выпуклости к точкам вогнутости. Следовательно, точка $M(x_0, y_0)$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Горизонтальные асимптоты

Если расстояние b от точки M кривой $y = f(x)$ до прямой $y = b$ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат (вправо или влево), то прямая $y = b$ есть **горизонтальная асимптота** этой кривой. Если $d \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), то $y \rightarrow b$.

Итак, чтобы найти горизонтальные асимптоты графика функции $y = f(x)$, надо отыскать пределы:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ и } \lim_{\Delta x \rightarrow -\infty} f(x) = b_1, \quad (3)$$

Если пределы (3) конечные и различные, то прямые $y = b$ и $y = b_1$ будут горизонтальными асимптотами. Может оказаться, что только один из этих двух пределов конечен, тогда будет одна горизонтальная асимптота. Если же конечных пределов (3) нет, то нет и горизонтальных асимптот.

Вертикальные асимптоты

Если при $x \rightarrow x_0$ (слева или справа) расстояние d от точки M кривой $y = f(x)$ до прямой $x = x_0$ стремится к нулю, а точка M неограниченно удаляется от начала координат (вверх или вниз), то прямая $x = x_0$ есть **вертикальная асимптота** этой кривой.

Следовательно, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{\Delta x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad (4)$$

то прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота графика этой функции.

Очевидно, что если выполняется хотя бы один из односторонних пределов (4), то точка x_0 является точкой разрыва функции второго рода.

Наклонные асимптоты

Прямая $y = kx + b$, называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если:

- 1) некоторый луч $(a, +\infty)$ ($-\infty, a$) целиком принадлежит $D(f)$
- 2) $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$)

11. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Правило Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Раскрыть эту неопределенность — значит вычислить $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Пусть далее $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и $g'(x)$ в указанной окрестности точки a . Тогда если существует предел отношения производных $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке a , причем $x_n \neq a$. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , положив их равными нулю, т. е. $f(a) = g(a) = 0$. Тогда, очевидно, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, x_n]$, дифференцируемы на интервале (a, x_n) , и по условию $g'(x) \neq 0$. Таким образом, для $f(x)$ и $g(x)$ выполнены все условия теоремы Коши на $[a, x_n]$, т. е. внутри $[a, x_n]$ существует такая точка ξ_n , что

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

По доопределению $f(a) = g(a) = 0$, следовательно,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \quad (1)$$

Пусть теперь в формуле (1) $n \rightarrow \infty$. Тогда очевидно, что $\xi_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то правая часть формулы (1) имеет при $n \rightarrow \infty$ предел, равный $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ существует предел и левой части формулы (1), причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Так как $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к точке a , то отсюда заключаем, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема доказана полностью.

Доказанную теорему обычно называют **правилом Лопиталья**.

Замечание 1. Теорема остается верной и в случае, когда $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

Замечание 2. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталья можно применить повторно. При этом получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Рассмотрим примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Будем говорить, что от-

ношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow a$ есть неопределенность

вида $\frac{\infty}{\infty}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, +\infty$ или $-\infty$.

Для этой неопределенности справедливо утверждение, аналогичное предыдущей теореме, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ условием

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то теорема останется справедливой.

Рассмотрим примеры.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

12. Формула Тейлора

Теорема (Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a и некоторой ее окрестности производные порядка $n+1$. Пусть x — любое значение аргумента из указанной окрестности, $x \neq a$. Тогда между точками x и a найдется такая точка ξ , что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x, a)$ многочлен относительно x степени n , стоящий в правой части формулы (1), т. е. положим

$$\begin{aligned} \varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Он называется многочленом Тейлора степени n для функции $f(x)$. Далее обозначим через $R_{n+1}(x)$ разность:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a).$$

Теорема будет доказана, если установить, что

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < \xi < x.$$

Фиксируем любое значение x из указанной окрестности. Для определенности считаем $x > a$. Обозначим через t переменную величину, изменяющуюся на отрезке $[a, x]$, и рассмотрим на отрезке вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (2)$$

Функция $F(t)$ удовлетворяет на отрезке $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля:

- 1) из формулы (2) и из условий, наложенных на функцию $f(x)$, вытекает, что $F(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[a, x]$, так как $f(t)$ и ее производные до порядка n непрерывны и дифференцируемы на $[a, x]$;
- 2) полагая в (2) $t = a$, имеем:

$$F(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0.$$

Полагая в (2) $t = x$, получаем:

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \dots \\ \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Таким образом, условие $F(a) = F(x)$ выполнено.

На основании теоремы Ролля внутри отрезка $[a, x]$ существует такая точка ξ , что

$$F'(\xi) = 0. \quad (3)$$

Вычислим производную $F'(t)$. Дифференцируя равенство (2) по t , получаем:

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Нетрудно заметить, что все члены в правой части равенства, за исключением двух последних, взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (4)$$

Полагая в (4) $t = \xi$ и используя равенство (3), получаем:

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

откуда

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, a < \xi < x.$$

Теорема полностью доказана.

Формула (1) называется **формулой Тейлора**, а выражение для $R_{n+1}(x)$ — **остаточным членом в форме Лагранжа**.

Формула Маклорена. Формула Маклорена получается из формулы Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} (x) + \frac{f''(0)}{2!} (x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + R_{n+1}(x).$$

Существуют различные формы остаточного члена в формуле Тейлора, например:

$R_n(x) = O((x-a)^n)$ остаточный член в форме Пеано

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (1-\theta)^n (x-a)^{n+1},$$

$0 < \theta < 1$ остаточный член в форме Коши.

Пример 1. Запишем многочлен Тейлора при $a = 0$ для функции $f(x) = e^x$. Производные любого порядка для этой функции совпадают с самой функцией $f(x)^{(n)} = f(x) = e^x$. Поэтому формула Тейлора для функции $f(x) = e^x$ с остатком в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

Если положить $x = 1$, то получим приближенное выражение для e :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Остаточный член можно оценить следующим образом:

$$R_n(1) \leq \frac{1}{n!} e < \frac{3}{n!}.$$

Пример 2. Запишем многочлен Тейлора при $a = 0$ для функции $f(x) = \sin x$. $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$, $f^{(n)}(0) = \sin(\frac{\pi n}{2})$. Значит, формула Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ с остатком в форме Лагранжа имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x), \\ R_{2k+1}(x) &= \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin(\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}), 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Для любого x остаток стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

13. Первообразная функция и неопределенный интеграл

В дифференциальном исчислении мы находили производную и дифференциал данной функции $F(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \text{ и } dF(x) = F'(x)dx.$$

Обозначим производную $F'(x)$ через $f(x)$, тогда

$$F'(x) = f(x) \text{ и } dF(x) = f(x)dx.$$

В интегральном исчислении решается обратная задача — отыскание функции $F(x)$ по заданной ее производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$, т. е. для заданной функции $f(x)$ надо найти такую функцию $F(x)$, производная которой $F'(x) = f(x)$, или дифференциал ее $dF(x) = f(x)dx$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ на множестве X , если производная ее $F'(x) = f(x)$ или дифференциал ее $dF(x) = f(x)dx$ на этом множестве.

Теорема. Если две различные функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными функциями для функции $f(x)$, то они отличаются одна от другой на произвольную постоянную.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, в котором неявным образом содержится произвольная постоянная.

Из определения неопределенного интеграла вытекают его свойства.

1. $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$, т. е. производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции. Действительно,

$$\left(\int f(x)dx \right)' = [F(x) + C]' = f(x).$$

2. $d \int f(x)dx = f(x)dx$, т. е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению. Иначе говоря, знаки дифференциала и интеграла, когда первый предшествует второму, взаимно сокращаются. Действительно,

$$d \int f(x)dx = d[F(x) + C] = [F(x) + C]dx = f(x)dx.$$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$, т. е. неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольного постоянного. Действительно,

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование. Докажем основные правила интегрирования.

1. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$ ($a \neq 0$), т. е. постоянный множитель

можно выносить за знак неопределенного интеграла.

Найдем производную от правой части данного равенства.

$$\left(a \int f(x)dx \right)' = a \left(\int f(x)dx \right)' = af(x),$$

следовательно, функция $F(x) + C = a \int f(x)dx$ есть первообразная функции для функции $af(x)$, что и требовалось доказать.

2. $\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx,$

т. е. неопределенный интеграл алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов.

Найдем производную от правой части равенства.

Таким образом, функция

$$F(x) + C = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

есть первообразная функция для функции

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x),$$

так как $F'(x) = f(x)$.

Правило 2 доказано.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 4x + \frac{5}{\sqrt{x}})dx &= 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int x^{-1/2} dx = \\ &= x^3 - 2x^2 + 10\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Метод подведения под знак дифференциала. Подведение под знак дифференциала постоянного слагаемого: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x + a)dx = F(x + a) + C$,

где $a = \text{const}$

Пример 2.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 15} &= \int \frac{dx}{(x - 5)^2 - 10} = \int \frac{d(x - 5)}{(x - 5)^2 - 10} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - 5 - \sqrt{10}}{x - 5 + \sqrt{10}} \right| + C.\end{aligned}$$

Подведение под знак дифференциала постоянного множителя: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$, где $a = \text{const}$.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 11x} = \frac{1}{11} \int \frac{d11x}{\sin^2 11x} = -\frac{1}{11} \text{ctg} 11x + C$$

Методы подведения под знак дифференциала постоянного множителя и постоянного слагаемого комбинируются: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$, где $a, b = \text{const}$.

Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки).

Если интеграл непосредственно не вычисляется, то во многих случаях к цели приводит метод интегрирования заменой переменной. Он является основным методом вычисления неопределенных интегралов.

1. Пусть требуется найти

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx, \quad (1)$$

где подынтегральная функция непрерывна. Применив подстановку $t = \varphi(x)$, получим

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \quad (2)$$

где $dt = \varphi'(x)dx$.

Предположим, что интеграл правой части равенства (2) проще, чем в левой части, и мы нашли его значение, равное $F(t) + C$, т. е.

$$\int f(t)dt = F(t) + C, \text{ где } dF(t) = F'(t)dt = f(t)dt, \text{ тогда}$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C. \quad (3)$$

Докажем, что равенство (3) справедливо. Для этого найдем дифференциал правой части этого равенства:

$$d\{F[\varphi(x)] + C\} = F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

Получили подынтегральное выражение интеграла левой части равенства (3), следовательно, это равенство справедливо.

Полезно запомнить частный случай:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C. \quad (4)$$

Интеграл от дроби, числитель которой есть дифференциал знаменателя, равен натуральному логарифму модуля знаменателя.

Действительно, положим $f(x) = t$, тогда $f'(x)dx = dt$ и

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C.$$

2. Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)dx, \quad (5)$$

где функция $f(x)$ непрерывна. Первообразная функция для функции $f(x)$ нам неизвестна. Произведем замену переменной, поло-

жив $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$, причем функция $\varphi(t)$ строго монотонна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$. Обратную функцию по отношению к функции $x = \varphi(t)$ обозначим через $t = \varphi(x)$.

Докажем, что

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (6)$$

Для этого достаточно показать, что дифференциал правой части равенства (6) равен подынтегральному выражению интеграла левой части этого равенства при $x = \varphi(t)$ или, что то же самое, при $t = \varphi(x)$.

Действительно,

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = f(x) dx.$$

Следовательно, равенство (6) справедливо.

Таким образом, чтобы вычислить интеграл левой части равенства (6), надо найти интеграл в правой части этого равенства и в полученном выражении перейти от t к прежней переменной x по формуле $t = \varphi(x)$.

Заметим, что такое преобразование интеграла (5) целесообразно лишь в том случае, если интеграл в правой части равенства (6) проще по сравнению с данным интегралом (5).

Пример 4.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{2a}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{(x+a) - (x-a)}{(x+a)(x-a)} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{x+a} = \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям. Формула интегрирования по частям имеет следующий вид:

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (7)$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые в некоторой области X .

Докажем эту формулу. Известно, что $d(uv) = u dv + v du$, отсюда

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int u dv + \int v du, \\ \int u dv &= \int d(uv) - \int v du = uv + C - \int v du. \end{aligned}$$

Присоединив к одному из двух неопределенных интегралов произвольную постоянную C , получим формулу (7).

Применение формулы (7) для вычисления интеграла $\int u dv$ будем считать удачным, если интеграл в правой части равенства (7) проще по сравнению с интегралом левой части этого равенства, т. е. если вычисление данного интеграла $\int u dv$ мы свели к вычислению другого более простого интеграла $\int v du$.

Пример 5.

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

14. Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a > b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Обозначим это разбиение через τ , а точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть **точками разбиения**. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую условимся называть **длиной частичного отрезка** $[x_{i-1}, x_i]$.

Образуем сумму:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i, \quad (1)$$

которую назовем **интегральной суммой** для функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i .

Определение 1. Если существует конечный предел I интегральной суммы (1) при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Или

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, числа a и b — соответственно нижний и верхний пределы интегрирования, $f(x)$ — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$, у которой $\lim_{k \rightarrow 0} \lambda_k = 0$, соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_k\}$ стремится к одному и тому же числу I .

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она является ограниченной на этом отрезке.

Доказательство. Положим обратное, т. е. допустим, что $f(x)$ не является ограниченной на $[a, b]$. Покажем, что в этом случае интегральную сумму можно за счет выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сделать сколь угодно большой при любом разбиении отрезка.

Действительно, так как $f(x)$ не является ограниченной на $[a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ она обладает этим свойством хотя бы на одном частичном отрезке разбиения, например на $[x_0, x_1]$. Выберем на остальных частичных отрезках точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ произвольно и обозначим

$$\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Зададим произвольное число $M > 0$ и возьмем такое ξ_1 на $[x_0, x_1]$, чтобы

$$|f(\xi_1)| \geq \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Это можно сделать в силу неограниченности функции $f(x)$ на $[x_0, x_1]$. Тогда

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| \geq |\sigma'| + M$$

и

$$|\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)\Delta x_1| - |\sigma'| \geq M,$$

т. е. интегральная сумма σ не имеет конечного предела при $\lambda \rightarrow 0$, а это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует.

Свойства определенного интеграла

При выводе свойств определенного интеграла будем предполагать, что подынтегральная функция непрерывна на $[a, b]$.

1. Из определения определенного интеграла следует, что интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где a и b — постоянные, есть число.

Следовательно, определенный интеграл при постоянных пределах a и b зависит только от вида функции $f(x)$ и не зависит от пе-

переменной интегрирования x , которую поэтому можно обозначать любой буквой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz, \quad (1)$$

2. Если нижний предел интеграла равен верхнему пределу, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = 0. \quad (2)$$

Это предложение можно принять за определение. С геометрической точки зрения равенство (2) очевидно, так как основание криволинейной трапеции равно нулю, следовательно, площадь ее также равна нулю.

3. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит свой знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \quad (3)$$

В определении определенного интеграла мы полагали, что отрезок $[a, b]$ ориентирован и $a < b$. Напишем интегральную сумму, соответствующую первому интегралу равенства (3):

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (4)$$

Очевидно, что $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$.

Теперь напишем интегральную сумму, соответствующую интегралу правой части равенства (3) при том же способе деления и выборе точек ξ_i в соответствующих частичных сегментах, получим

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i), \quad (5)$$

где $-\Delta x_i = -(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} - x_i$.

Из равенств (4) и (5) следует, что $\sigma_1 = -\sigma_2$.

В этом равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x = \max \Delta x_i$), получим равенство (3).

4. При любом расположении точек a, b, c в промежутке интегрируемости $f(x)$ имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx. \quad (6)$$

Напишем интегральную сумму, соответствующую интегралу левой части равенства (6):

$$\sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим равенство (6).

6. Интеграл постоянной величины равен произведению этой постоянной на длину промежутка интегрирования:

$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

Следствие. Если подынтегральная функция равна нулю, то определенный интеграл тоже равен нулю.

7. Интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx. \quad (7)$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей, составим интегральную сумму, соответствующую интегралу левой части равенства (7), и преобразуем ее:

$$\sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i) - f_3(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f_3(\xi_i) \Delta x_i. \quad (8)$$

В равенстве (8) перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим равенство (6).

8. Пусть $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (9)$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей и составим интегральные суммы для данных двух функций. Точки ξ_i в частичных сегментах выбираем произвольно, но для отдельных сумм одни и те же, получим:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i. \quad (10)$$

В неравенстве (10) перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим неравенство (9).

9. **Теорема (о среднем значении).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c) \quad \text{где } c \in [a, b]. \quad (11)$$

Доказательство. Известно, что непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является ограниченной и достигает наибольшего и наименьшего своих значений, т. е. $m \leq f(x) \leq M$.

Это двойное неравенство проинтегрируем, получим

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Воспользовавшись свойством 6, будем иметь

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \text{откуда} \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

Непрерывная функция $f(x)$ принимает все свои промежуточные значения, заключенные между m и M . Поэтому найдется такая точка $c \in [a, b]$, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

отсюда получаем равенство (11).

Теорема доказана полностью.

Геометрический смысл теоремы. Если непрерывная функция $f(x) \geq 0$, то равенство (11) можно прочесть так: площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, основанием которого служит основание этой трапеции, а высотой — некоторая средняя ордината.

15. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f(x)$ является ограниченной на отрезке $[a, b]$ и τ — разбиение этого отрезка точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$. Обозначим через m_i и M_i соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани этой функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и составим следующие суммы:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Эти суммы называются соответственно **верхней и нижней суммами Дарбу функции $f(x)$** для данного разбиения τ отрезка $[a, b]$.

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M \text{ при } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Отсюда

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S,$$

т. е. любая интегральная сумма и суммы Дарбу для данного разбиения связаны неравенствами: $s \leq \sigma \leq S$. (1)

Свойства сумм Дарбу

1. Для любого фиксированного разбиения τ и для любого $\varepsilon > 0$ точки ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам: $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Точки ξ_i можно выбрать также и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам: $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть τ — некоторое фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$. Докажем, например, неравенства $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Согласно свойству точной верхней грани M_i для данного $\varepsilon > 0$ на $[x_{i-1}, x_i]$ можно указать такую точку ξ_i , что $0 \leq M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Умножая эти неравенства на Δx_i и затем складывая, получаем: $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Аналогично устанавливаются неравенства $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

2. От добавления к данному разбиению τ отрезка $[a, b]$ новых точек разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Доказательство. Для доказательства достаточно ограничиться добавлением к данному разбиению τ еще одной точки разбиения x' , так как добавление нескольких точек разбиения можно провести, добавляя их по одной. Предположим, что эта новая точка x' попала на отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Обозначим соответственно через s и s' нижние, а через S и S' — верхние суммы Дарбу данного разбиения и полученного из него добавлением точки x' разбиения τ' .

Проведем доказательство для нижних сумм Дарбу s и s' . Обозначим через m'_i и m''_i точные нижние грани функции $f(x)$ соот-

ветственно на отрезках $[x_{i-1}, x']$ и $[x', x_i]$. В сумму s входит слагаемое $m_i \Delta x_i$, а в сумму s' вместо него — слагаемые $m'_i(x' - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x')$. Остальные слагаемые в суммах s и s' одинаковы. Так как $m'_i \geq m_i$, $m''_i \geq m_i$ (точная нижняя грань на части $[x_{i-1}, x']$ не меньше точной нижней грани на всем $[x_{i-1}, x_i]$), то

$$m'_i(x' - x_{i-1}) + m''_i(x_i - x') \geq m_i(x' - x_{i-1}) + m_i(x_i - x') = m_i \Delta x_i.$$

Отсюда следует, что $s' \geq s$.

Аналогично доказывается, что $S \geq S'$.

3. Нижняя сумма Дарбу для любого разбиения τ' не превосходит верхней суммы для любого другого разбиения τ'' .

Доказательство. Пусть s' и S' , s'' и S'' — нижняя и верхняя суммы Дарбу соответственно для разбиений τ' и τ'' . Рассмотрим разбиение τ , состоящее из всех точек, входящих в разбиения τ' и τ'' . Обозначим его суммы Дарбу через s и S . Так как разбиение τ может быть получено из разбиения τ' добавлением к нему точек разбиения τ'' , то согласно свойству 2, учитывая очевидное неравенство $S \geq s$, получаем: $s' \leq s \leq S \leq S'$.

Но разбиение τ может быть также получено из разбиения τ'' добавлением точек разбиения τ' . Поэтому $s'' \leq s \leq S \leq S''$.

Сравнивая установленные неравенства, получаем $s' \leq S'$, $s'' \leq S''$.

4. Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу данной функции $f(x)$ для возможных разбиений отрезка $[a, b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу ограничено сверху, причем точная верхняя грань множества $\{s\}$ не превосходит точной нижней грани множества $\{S\}$.

Доказательство. Это свойство непосредственно следует из свойства 3. Действительно, множество всех верхних сумм Дарбу $\{S\}$ является ограниченным снизу, например, любой нижней суммой Дарбу s , а множество всех нижних сумм Дарбу $\{s\}$ является ограниченным сверху, например, любой верхней суммой Дарбу S , а это значит, что множества $\{S\}$ и $\{s\}$ имеют точные грани. Обозначим через I^* точную нижнюю грань множества $\{S\}$, а через I_* — точную верхнюю грань множества $\{s\}$:

$$I^* = \inf\{S\}, I_* = \sup\{s\}.$$

Покажем, что $I_* \leq I^*$. Пусть $I_* > I^*$. Обозначим их разность через ε , так что $I_* - I^* = \varepsilon > 0$. Из свойства точных граней I_* и I^* вытекает, что существуют числа S' и s'' , представляющие собой

соответственно такие верхнюю и нижнюю суммы Дарбу некоторых разбиений τ' и τ'' отрезка $[a, b]$, что $I^* + \frac{\varepsilon}{2} > S'$ и $I_* - \frac{\varepsilon}{2} < s''$.

Вычитая второе неравенство из первого, получаем:

$$S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon.$$

Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, поэтому $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$, что противоречит свойству 3. Следовательно, $I_* \leq I^*$.

16. Критерий интегрируемости

Теорема. Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0. \quad (1)$$

Условие (1) означает: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|S - s| < \varepsilon$. Так как $S \geq s$, то последнее неравенство равносильно неравенству

$$S - s < \varepsilon. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, т. е. существует определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx. \text{ Это означает, что для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует такое}$$

$\delta > 0$, что для любого разбиения τ , удовлетворяющего условию $\lambda < \delta$, независимо от точек ξ_i выполняется неравенство:

$$|\sigma - I| < \varepsilon / 4. \quad (3)$$

Зафиксируем любое такое разбиение τ . Для него, согласно первому свойству сумм Дарбу, можно указать такие интегральные суммы σ' и σ'' , что

$$S - \sigma' \leq \varepsilon / 4, \sigma'' - s \leq \varepsilon / 4. \quad (4)$$

Отметим, что обе интегральные суммы σ' и σ'' удовлетворяют неравенству (3). Из соотношения $S - s = (S - \sigma') + (\sigma' - I) - (I - \sigma'') + (\sigma'' - s)$ и из неравенств (3) и (4) следует, что $S - s < \varepsilon$, а это и означает выполнение условия (2).

Достаточность. Пусть выполнено условие (2). Согласно свойству 4 сумм Дарбу $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ для любых верхних и нижних сумм Дарбу, поэтому $0 \leq I^* - I_* \leq S - s$, откуда согласно (2) следует, что $0 \leq I^* - I_* \leq \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Значит, $I^* - I_* = 0$, т. е. $I^* = I_*$. Полагая $I = I^* = I_*$, получаем, что для любого разбиения выполняются неравенства

$$s \leq I \leq S. \quad (5)$$

Если же интегральная сумма σ и суммы Дарбу s и S отвечают одному и тому же разбиению τ , то, как известно,

$$s \leq \sigma \leq S. \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$|\sigma - I| \leq S - s. \quad (7)$$

По условию, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство (2), но тогда из неравенства (7) следует, что и $|\sigma - I| < \varepsilon$ при $\lambda < \delta$, а это означает, что число I является пределом интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$, т. е. функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

17. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона—Лейбница

Рассмотрим определенный интеграл с нижним пределом a и переменным верхним пределом x ($a \leq x \leq b$). Этот интеграл является функцией верхнего предела. Обозначим его через $\Phi(x)$, т. е.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

Напомним, что в определенном интеграле переменную интегрирования x можно обозначать любой буквой, от этого величина интеграла не изменится. В интеграле (1) во избежание смешивания переменной интегрирования с переменным верхним пределом обозначили переменную интегрирования через t , а переменный верхний предел — через x .

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

имеет производную на этом сегменте, причем

$$\Phi'(x) = f(x)$$

Иными словами, производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции $f(t)$ при $t = x$.

Доказательство. Дадим в произвольной точке $x \in [a, b]$ приращение Δx такое, чтобы $x + \Delta x \in [a, b]$, тогда новое значение функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Отсюда получим приращение функции в упомянутой точке x :

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Применив к этому интегралу теорему о среднем значении, будем иметь

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \Delta x f(\xi), \quad (2)$$

где $x \leq \xi \leq x + \Delta x$, отсюда

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

Пусть $\Delta x \rightarrow 0$, тогда в силу двойного неравенства (2) $\xi \rightarrow x$ и $f(\xi) \rightarrow f(x)$, так как по условию функция $f(t)$ непрерывна. Следовательно, предел левой части равенства (3) также существует:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(x),$$

т. е.

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Таким образом, доказали, что производная функции $\Phi(x)$ существует в произвольной точке $x \in [a, b]$, следовательно, функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана полностью.

Из доказанной теоремы следует:

1) непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ всегда имеет первообразную функцию хотя бы в таком виде:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b]);$$

2) первообразная непрерывной функции также непрерывна.

Это следует из дифференцируемости первообразной функции $\Phi(x)$.

Теорема 2 (формула Ньютона—Лейбница). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$ на этом отрезке, то имеет место следующая формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

Доказательство. По условию теоремы, непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет первообразную функцию $F(x)$ и, по доказанной теореме 1, для этой функции первообразной также будет функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, (x \in [a, b]).$$

Известно, что две любые первообразные функции для одной и той же функции отличаются между собой на произвольную постоянную, следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) + C. \quad (5)$$

Пусть $x = a$, тогда $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ и $0 = F(a) + C$, отсюда $C = -F(a)$.

Подставив это значение C в равенство (5), получим

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

или

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Пусть теперь $x = b$, тогда $\Phi(b) = F(b) - F(a)$, т. е.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

или, сменив обозначение t переменной интегрирования на x , получим формулу (4), которая является основной формулой в интегральном исчислении и носит название **формулы Ньютона—Лейбница**. Эту формулу можно прочесть так: определенный интеграл при $x = b$ равен разности двух значений и при $x = a$ — любой первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Формулу Ньютона—Лейбница обычно записывают в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (6)$$

Символ $\Big|_a^b$ называется **знаком двойной подстановки**.

Сформулируем полученное правило: чтобы вычислить определенный интеграл (6), надо найти первообразную функцию $F(x)$ для $f(x)$ и произвести двойную подстановку от a до b для функции $F(x)$, т. е. получить разность $F(b) - F(a)$.

18. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Кантора она и равномерно-непрерывна на нем. Пусть дано любое $\varepsilon > 0$. Согласно следствию из теоремы Кантора для положительного числа $\varepsilon / (b - a)$ найдется такое $\delta > 0$, что при разбиении отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, длина которых $\Delta x_i < \delta$, все колебания ω_i меньше $\varepsilon / (b - a)$.

Отсюда

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon \text{ при } \lambda < \delta.$$

Следовательно, для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ выполнено достаточное условие интегрируемости, а из него вытекает существование определенного интеграла.

Теорема доказана.

Как следует из теоремы, условие непрерывности функции является достаточным условием интегрируемости функции. Но это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Так, например, существует определенный интеграл от функций,

имеющих конечное число точек разрыва. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ является ограниченной на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых имеет разрыв первого рода и, кроме того, имеет односторонние пределы в точках a и b .

Следствие из теоремы 2. Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

19. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если:

- 1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и φ' непрерывна на $[\alpha, \beta]$;
- 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Доказательство. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

С другой стороны, рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ сложную функцию от переменной t : $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(t)$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, и поэтому согласно формуле Ньютона—Лейбница получаем:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Этим доказана справедливость формулы (1).

Теорема доказана.

Формула (1) называется формулой замены переменной или подстановки в определенном интеграле.

Замечание 1. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной от новой переменной t следует возвращаться к старой переменной x , то при вычислении определенного интеграла этого делать не нужно, так как теперь следует найти число, которое, согласно доказанной формуле, равно значению каждого из рассматриваемых интегралов.

Замечание 2. При использовании формулы (1) необходимо проверять выполнение перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то может быть получен и неверный результат.

Теорема 2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2)$$

Доказательство. Так как функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$, то по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)]dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Отсюда, используя 4-е свойство определенных интегралов, получаем:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

или

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv|_a^b,$$

откуда и следует формула (2).

Теорема доказана.

Формула (2) называется **формулой интегрирования по частям** в определенном интеграле.

20. Несобственные интегралы.

Абсолютная сходимость. Признаки сходимости

Вводя определенный интеграл как предел интегральных сумм, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечный, а подынтегральная функция является ограниченной на этом отрезке. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то данное выше определение определенного интеграла теряет смысл. Так, в случае бесконечного отрезка интегрирования нельзя разбить отрезок на n частей конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Однако и на эти случаи можно обобщить понятия определенного интеграла. В результате такого обобщения и появилось понятие несобственного интеграла.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a, R]$, т. е. существует

определенный интеграл $\int_a^R f(x) dx$ при любом $R > a$. Тогда, если

существует конечный предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx, \quad (1)$$

то его называют **несобственным интегралом первого рода** и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (2)$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

В этом случае говорят, что интеграл (2) существует или сходится. Если же предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (2) не существует или расходится.

Аналогично интегралу (2) вводится несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx. \quad (3)$$

Как сумму интегралов вида (2) и (3) можно определить несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (4)$$

где c — любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$. Точку $x = b$ будем называть особой, если функция $f(x)$ неограниченна в любой окрестности этой точки, но является ограниченной в любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, заключенном в $[a, b)$. Пусть на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$ функция интегрируема, т. е. сущест-

вует определенный интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при таком любом $\varepsilon > 0$, что $b - \varepsilon > a$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (5)$$

то его называют **несобственным интегралом второго рода** и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (6)$$

В этом случае говорят, что интеграл (6) существует или сходится. Если же предел (5) не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (6) не существует или расходится.

Аналогично, если $x = a$ — особая точка, то несобственный интеграл определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ неограниченна в окрестности какой-нибудь внутренней точки $c \in [a, b]$, то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Если a и b — особые точки, то, если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

где c — любая точка из (a, b) .

Теорема (признак сходимости несобственных интегралов). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полупрямой $[a, +\infty)$ и удовлетворяют на ней условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (7)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad (8)$$

а из расходимости интеграла (8) следует расходимость интеграла (7).

Доказательство. Введем обозначения:

$$F(R) = \int_a^R f(x)dx, \quad G(R) = \int_a^R g(x)dx.$$

Так как $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$, то справедливы следующие неравенства:

$$0 \leq F(R) \leq G(R) \text{ при } R \geq a, \quad (9)$$

кроме того, функция $F(R)$ (а также $G(R)$) является неубывающей на полупрямой $[a, +\infty)$. В самом деле, если $a < R_1 < R_2$, то $\int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \geq 0$ и, следовательно,

$$F(R_2) = \int_a^{R_2} f(x)dx = \int_a^{R_1} f(x)dx + \int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \geq \int_a^{R_1} f(x)dx = F(R_1).$$

Пусть интеграл (7) сходится, т. е. функция $G(R)$ имеет конечный предел при $R \rightarrow +\infty$. Отсюда в силу неубывания $G(R)$ следует, что функция $G(R)$ является ограниченной на $[a, +\infty)$. Но тогда согласно равенству (9) функция $F(R)$ тоже является ограни-

ченной на $[a, +\infty)$ и, следовательно, имеет на $[a, +\infty)$ точную верхнюю грань.

По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R_\varepsilon \geq a$, что $0 \leq I - F(R_\varepsilon)$. Так как функция $F(R)$ не убывает на $[a, +\infty)$, то для любого $R > R_\varepsilon$ выполняется неравенство $F(R) \geq F(R_\varepsilon)$ и, значит, $0 \leq I - F(R) < \varepsilon$ при $R \geq R_\varepsilon$.

Таким образом, $|F(R) - I| < \varepsilon$ при $R \geq R_\varepsilon$.

Это означает, что $\lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = I$, т. е. интеграл (8) сходится.

Пусть теперь интеграл (8) расходится. Тогда, если предположить, что интеграл (7) сходится, то, в силу доказанного выше, интеграл (8) сходится, что противоречит условию. Следовательно, интеграл (7) также расходится.

Теорема доказана.

Теорема (критерий) Коши. Для того, чтобы интеграл (2) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $b > a$, что если $b_1 > b$ и $b_2 > b$, то

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Определение 3. Интеграл (2) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Теорема 1. Для того чтобы интеграл (2) был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $b > a$, что если $b_1 > b$ и $b_2 > b$, то

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. Если интеграл (2) абсолютно сходится, то он просто сходится.

ЛЕКЦИЯ № 3. Функции нескольких переменных

1. Топология. Метрические пространства.

Компактные множества в $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Пусть A — некоторое множество. Функция $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $d(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$;
- 2) $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$ для всех $a, b, c \in A$, — называется **метрикой** на A .

Множество A с определенной на нем метрикой называется **метрическим пространством** и обозначается (A, d) или просто M .

Второе свойство известно как неравенство треугольника.

Если взять $A = \mathbb{R}$ и $d(x, y) = |x - y|$, то нетрудно видеть, что d -метрика. Вообще возьмем $A = \mathbb{R}^n$ и определим d равенством:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Снова нетрудно показать, что d — метрика. Эта метрика называется **евклидовой**, или **обычной**, метрикой.

Два других примера метрик на $A = \mathbb{R}^n$ задаются равенствами:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Проверку того, что это действительно метрики, оставляем читателю в качестве упражнения.

Если A — любое множество, на нем можно определить метрику по правилу: $d(x, y) = 0$ при $x = y$ и $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Полученная метрика называется **дискретной метрикой** на A .

Теперь легко определить непрерывность отображений метрических пространств.

Определение 2. Пусть $(A, d_A), (B, d_B)$ — метрические пространства. Функция $f: A \rightarrow B$ называется **непрерывной** в точке $x \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, $d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$ что, как только $d_A(x, y) < \delta$. Функция называется непрерывной, если она непрерывна во всех точках $x \in A$.

Определение. Покрытием множества S множества X называется такое семейство подмножеств $\{U_j: j \in J\}$ множества X , что $S \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Если индексирующее множество J конечно, то $\{U_j: j \in J\}$ называется **конечным покрытием**.

Пример

Семейство $\{[1/n, 1 - 1/n]: n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием подмножества $(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}$.

Если $S = X$, то семейство $\{U_j: j \in J\}$, обладающее свойством $S \subset \bigcup_{j \in J} U_j$, является покрытием X .

Пример

Если $U_n = (n, n + 3) \subset \mathbb{R}$, то $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$ — покрытие $\mathbb{R}$.

Определение. Пусть $\{U_j: j \in J\}$ и $\{V_k: k \in K\}$ — покрытия подмножества $S \subset X$. Если для любого $j \in J$ найдется такое $k \in K$, что $U_j \subset V_k$, то говорят, что $\{U_j: j \in J\}$ — подпокрытие покрытия $\{V_k: k \in K\}$.

Пример

$\{V_r: r \in \mathbb{R}\}$, где $V_r = (r, r + 3)$, является покрытием $\mathbb{R}$, и $\{U_n: n \in \mathbb{N}\}$, где $U_n = (n, n + 3)$ — его подпокрытие.

Определение. Пусть X — метрическое пространство и S — его подмножество. Покрытие $\{U_j: j \in J\}$ называется **открытым покрытием** S , если каждое $U_j: j \in J$, открыто в X .

Определение. Подмножество S метрического пространства X называется **компактным**, если всякое открытое покрытие S обладает конечным подпокрытием.

В частности, метрическое пространство X компактно, если всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Пространство $\mathbb{R}$ с обычной метрикой некомпактно, потому что открытое покрытие $\{(n, n + 2): n \in \mathbb{Z}\}$ не имеет конечных подпокрытий. Пространство X с дискретной метрикой тогда и только тогда компактно, когда оно конечно. Так как каждая точка дискретного пространства X является открытым множеством, то для

бесконечного X открытое покрытие, состоящее из всех одноточечных множеств, не имеет конечного подпокрытия. С другой стороны, если X конечно, то оно имеет только конечное число открытых подмножеств.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Если $S \subset Y$ — компактное подпространство, то $f(S)$ компактно.

Доказательство. Пусть $\{U_j: j \in J\}$ — открытое покрытие $f(S)$; тогда $\{f^{-1}(U_j): j \in J\}$ — открытое покрытие S . Так как S компактно, найдется конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_k): k \in K\}$, K конечно. Но $f(f^{-1}(U_k)) \subset U_k$, и поэтому $\{U_k: k \in K\}$ — покрытие $f(S)$, являющееся конечным подпокрытием покрытия $\{U_j: j \in J\}$.

Теорема доказана.

Компактность множеств пространства E^n и C

Из ограниченности последовательности точек евклидова пространства, как известно, следует возможность выделения из этой последовательности сходящейся подпоследовательности (теорема Больцано—Вейерштрасса). Однако этот факт наблюдается далеко не во всех метрических пространствах. Так, например, последовательность точек

$$\begin{aligned} x_1(1, 0, 0, \dots), \\ x_2(0, 1, 0, \dots), \\ \dots \end{aligned}$$

в пространстве m располагается в замкнутой сфере радиуса 1, следовательно, она ограничена. Но из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из-за того, что расстояние между любыми двумя точками последовательности $d(x_i, x_k) = 1, i \neq k$.

Определение. Множество S , содержащееся в метрическом пространстве $\mathfrak{R}$, называется **компактным**, если из любой бесконечной последовательности точек множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Если пределы указанных последовательностей принадлежат S , то множество S называется **компактным в себе**, если же эти пределы принадлежат пространству $\mathfrak{R}$, не принадлежа, может быть, множеству S , то множество S называется **компактным в пространстве** (относительно пространства).

Из определения следует, что, для того чтобы множество было компактно в себе, необходимо и достаточно, чтобы оно было компактным в пространстве $\mathfrak{R}$ и замкнутым.

Рассмотрим некоторые свойства компактных множеств.

Теорема. Всякое бесконечное ограниченное множество точек n -мерного евклидова пространства компактно.

Теорема. Всякое компактное множество ограничено.

Доказательство. Предположим, что данное множество не ограничено. В этом случае всегда можно построить такую последовательность точек $\{x_n\}$ данного множества, что

$$d(x_1, x_n) \geq n, \\ d(x_k, x_{k+l}), k = 1, 2, \dots$$

Никакая подпоследовательность такой последовательности не может быть фундаментальной. Полученное противоречие доказывает неправоту предположения.

Теорема доказана.

Таким образом, в качестве примеров компактных множеств можно привести любые ограниченные множества точек n -мерного евклидова пространства, так как для множеств пространства E^n необходимым и достаточным условием компактности является их ограниченность.

В пространстве C существуют ограниченные бесконечные множества непрерывных функций, из которых нельзя выделить сходящиеся (в смысле метрики C) последовательности. Так, например, рассмотрим множество функций $x^1, x^2, x^3 \dots$ пространства $C[0, 1]$. Нетрудно видеть, что эта ограниченная на сегменте $[0, 1]$ последовательность имеет своей предельной функцией разрывную функцию

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

которая не принадлежит пространству C . Всякая подпоследовательность рассмотренной последовательности будет сходиться к той же разрывной функции, т. е. не будет сходиться в пространстве $C[0, 1]$.

Рассмотрим критерий компактности в пространстве C . Введем предварительно два определения.

Определение. Функции $f(x)$ некоторого множества S называются **равномерно-ограниченными**, если для всех функций этого множества существует такая единая константа k , что $|f(x)| \leq k$.

Определение. Функции $f(x)$ некоторого множества S называются **равностепенно-непрерывными**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, если $|x_1 - x_2| < \delta$ для любых x_1, x_2 и для любой функции $f(x) \in M$.

Теорема (критерий компактности в пространстве C). Для того, чтобы множество S функций $f(x)$ в пространстве C было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции множества S были равномерно-ограниченными и равностепенно-непрерывными.

2. Евклидово пространство

Перейдем теперь к изучению множеств n -мерного евклидова пространства.

Числовой прямой мы по-прежнему будем называть множество всех действительных чисел Z ; **n -мерным пространством** будем называть множество всевозможных n -точек действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Всякую такую n -точку будем называть **точкой n -мерного пространства**, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ее **координатами**. Расстояние $\rho(x, x')$ между двумя точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ n -мерного пространства будем определять по формуле:

$$\rho(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}.$$

При любом n пространство с таким определением расстояния между его точками называется **n -мерным евклидовым пространством** и обозначается E_n .

При $n = 1$ пространство E_1 , как уже было отмечено, есть числовая прямая, расстояние между точками которой определяется по формуле:

$$\rho(x, x') = \sqrt{(x - x')^2} = |x - x'|.$$

При $n = 2$ пространство E_2 называется плоскостью, а формулой для определения расстояния в этом случае является:

$$\rho(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}.$$

Расстояние между точками n -мерного евклидова пространства удовлетворяет трем условиям:

- 1) аксиоме тождества $\rho(x, x') = 0$ — тогда и только тогда, когда точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ совпадают, т. е. тогда и только тогда, когда $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n$;
- 2) аксиоме симметрии $\rho(x, x') = \rho(x', x)$;
- 3) аксиоме треугольника $\rho(x, x') + \rho(x', x'') \geq \rho(x, x'')$.

Определение. n -мерным сегментом (или n -мерным параллелепипедом при условии, что $a_1 = a_2 = \dots = a_n, b_1 = b_2 = \dots = b_n$) n -мерный сегмент называют **n -мерным кубом**) будем называть множество всех точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного евклидова пространства, для координат которых выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} a_1 &< x_1 < b_1, \\ a_2 &< x_2 < b_2, \\ &\dots \\ a_n &< x_n < b_n. \end{aligned}$$

Определение. n -мерный шар с центром в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ радиуса R — множество всех точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которых выполняется неравенство $\rho(x_0, x) \leq R$.

Множество всех точек, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_0, x) \leq R$, называют **внутренностью** этого шара.

Сформулируем некоторые основные определения.

Множество точек n -мерного пространства называется **ограниченным**, если существует n -мерный сегмент, содержащий все точки данного множества. Внутренность любого n -мерного шара, содержащая данную точку n -мерного пространства, называется **окрестностью** точки.

Точка ξ называется **предельной** точкой множества A , если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек множества A .

Точка ξ может как принадлежать множеству A , так и не принадлежать ему. Очевидно, что конечные множества не могут иметь предельных точек.

Точка a , принадлежащая множеству A и не являющаяся для него предельной, называется **изолированной** точкой множества A . Для всякой изолированной точки a множества A существует

окрестность, не содержащая никаких точек множества, отличных от точки a .

Множество A называется **связным**, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, состоящей из точек данного множества.

Например, n -мерный шар — связное множество, а множество, состоящее из двух n -мерных шаров, не является связным.

Точка a называется внутренней точкой множества A , если существует δ -окрестность этой точки, состоящая из точек этого множества.

Множество A , состоящее лишь из внутренних точек, называется **открытым множеством**.

Связное открытое множество A точек называется **открытой областью**, или просто областью.

Точка называется **граничной точкой области**, если в любой ее δ -окрестности есть точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие этой области. Множество всех граничных точек области называется границей этой области.

Например, для области, которая состоит из точек, лежащих внутри шара, границей является сфера.

Множество A точек, образованное областью и ее границей, называется замкнутой областью.

Определение. Последовательность точек n -мерного пространства

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \\ x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), \\ &\dots \\ x^{(l)} &= (x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}). \end{aligned}$$

называется **сходящейся**, если существует такая точка этого пространства $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для всех значений $l > N$ будет выполняться неравенство $\rho(x^{(l)}, x) < \varepsilon$. Точка x называется **пределом последовательности** $\{x^{(l)}\}$, что записывается в виде:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x^{(l)} = x, \text{ или } \{x^{(l)}\} \rightarrow x.$$

Из определения расстояния между точками n -мерного евклидова пространства непосредственно следует, что точка x будет

пределом последовательности точек $\{x^{(l)}\}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}x_1 &= \lim_{l \rightarrow \infty} x_1^{(l)}, \\x_2 &= \lim_{l \rightarrow \infty} x_2^{(l)}, \\&\dots \\x_n &= \lim_{l \rightarrow \infty} x_n^{(l)}.\end{aligned}$$

В самом деле, пусть $\lim_{l \rightarrow \infty} x^{(l)} = x$, т. е. для любого найдется такое N , что для всех значений $l > N$ будет выполняться неравенство $\rho(x^{(l)}, x) < \varepsilon$, или подробнее:

$$\sqrt{(x_1^{(l)} - x_1)^2 + (x_2^{(l)} - x_2)^2 + \dots + (x_n^{(l)} - x_n)^2} < \varepsilon.$$

Так как

$$|x_i^{(l)} - x_i| \leq \sqrt{(x_1^{(l)} - x_1)^2 + (x_2^{(l)} - x_2)^2 + \dots + (x_n^{(l)} - x_n)^2} < \varepsilon,$$

то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_1^{(l)} = x_1, \lim_{l \rightarrow \infty} x_2^{(l)} = x_2, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} x_n^{(l)} = x_n.$$

Наоборот, если

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_1^{(l)} = x_1, \lim_{l \rightarrow \infty} x_2^{(l)} = x_2, \dots, \lim_{l \rightarrow \infty} x_n^{(l)} = x_n,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для всех значений $l > N$ будут выполняться неравенства:

$$|x_1^{(l)} - x_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, |x_2^{(l)} - x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \dots, |x_n^{(l)} - x_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда следует:

$$\rho(x^{(l)}, x) = \sqrt{(x_1^{(l)} - x_1)^2 + (x_2^{(l)} - x_2)^2 + \dots + (x_n^{(l)} - x_n)^2} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim_{l \rightarrow \infty} x^{(l)} = x$.

В математическом анализе, как известно, одним из самых важных понятий было понятие предельного перехода.

Самым простым, но не единственным способом введения предельного перехода во множество является его метризация, т. е. введение закона расстояния между элементами множества.

Определение. Метрическим пространством называется произвольное множество R некоторых элементов, называемых **точками**, в котором для любых двух точек $x, y \in R$ определено число $\rho(x, y)$ — расстояние от x до y (метрика)

так, что выполняются следующие условия (аксиомы):

- 1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x и y (аксиома симметрии);
- 2) $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$, $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$ (аксиома тождества);
- 3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (аксиома треугольника).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R называется **фундаментальной**, если $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Определение. Метрическое пространство R называется **полным**, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится, т. е. если для каждой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ существует такая точка $x_0 \in R$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

На основании этих определений легко обобщается на случай полного метрического пространства необходимый и достаточный признак Коши сходимости последовательности.

Теорема. Для сходимости последовательности точек полного метрического пространства необходима и достаточна ее фундаментальность.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\{x_n\} \rightarrow x_0 \in R$. Тогда для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для всех значений $m, n > N$ будут выполняться неравенства:

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства и применяя аксиому треугольника, получаем:

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon.$$

Достаточность. Достаточность следует из определения полного метрического пространства.

3. Функция нескольких переменных. Предел и непрерывность

Пусть D — множество пар (x, y) действительных чисел, или есть множество точек на плоскости O_{xy} , и $Z = \{z\}$ — числовое множество.

Если каждой паре чисел $(x, y) \in D$ по некоторому правилу (закону) f поставлено в соответствие одно определенное число $z \in Z$, то говорят, что на множестве D задана (определена) функция $Z = f(x, y)$.

Переменные x и y называются **независимыми переменными** или **аргументами функции**, а множество D — областью определения функции.

Функцию двух переменных, как уже говорилось, можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$, поэтому ее принято обозначать и таким символом: $Z = f(M)$.

Аналогично определяется функция от большего числа переменных: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Область определения этой функции есть множество $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, которое можно рассматривать как множество точек n -мерного пространства, поэтому функцию и в этом случае можно также обозначать через $Z = f(M)$.

Определение 1. Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ будем называть круг, центром которого служит эта точка. Говорят, что последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0, \text{ где } \rho_n = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, за исключением, может быть, самой точки $M_0(x_0, y_0)$.

Функция $f(x, y)$ имеет предел A (конечный или бесконечный) при стремлении x к x_0 и y к y_0 (или в точке (x_0, y_0)), если для любой стремящейся к (x_0, y_0) последовательности точек (пар значений аргументов) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, входящих в область определения функции, но отличных от (x_0, y_0) , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots, f(x_n, y_n)$ всегда стремится к A .

В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ или } \lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A.$$

Это определение предела основано на понятии предела числовой последовательности, поэтому его часто называют **определением на языке последовательностей**.

Для большего числа переменных предел можно определить аналогично.

Запишем еще одно определение предела для функции многих переменных на языке $\varepsilon - \delta$.

Определение 1а. Пусть на множестве E пространства E^n определена функция $f(x)$, E_0 — некоторое подмножество множества E .

Число a называется пределом функции $f(x)$ по множеству E_0 при $x \rightarrow x^{(0)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in O(x^{(0)}, \delta) \cap E_0$, $x \neq x_0$ ($O(x^{(0)}, \delta)$ — δ — окрестность точки x_0).

Наряду с указанными пределами функций многих переменных можно рассматривать и пределы других видов, связанные с последующим переходом к пределу, например по различным координатам, т. е. предел вида

$$\lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \dots \lim_{x_{i_n} \rightarrow x_{i_n}^0}, f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, $x^{(0)} = (x_i^{(0)}) \in E^n$ и функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, кроме, быть может, самой этой точки. Предел указанного вида называется **повторным пределом**.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве E , содержащем все точки некоторой прямоугольной окрестности $P((x_0, y_0); \delta_1, \delta_2)$ точки (x_0, y_0) , кроме, быть может, точек прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

Если существует предел функции f в точке (x_0, y_0) по множеству E и если при любом $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $y \neq y_0$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = g(y), \quad (1)$$

то повторный предел $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ существует:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in E} f(x, y).$$

Доказательство. Пусть $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in E} f(x, y) = A$ и пусть

фиксирована произвольная $\varepsilon > 0$. Существует прямоугольная окрестность $P((x_0, y_0); \eta_1, \eta_2)$, $0 < \eta_1 < \delta_1$ и $0 < \eta_2 < \delta_2$ так, что если $0 < |x - x_0| < \eta_1$, $0 < |y - y_0| < \eta_2$, то

$$|f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

В силу существования предела (1) для такого любого числа y , что $0 < |y - y_0| < \eta_2$, из (2) следует, что $|g(y) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$.

Теорема доказана полностью.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и в самой этой точке.

Если предел функции $f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ равен значению функции в точке (x_0, y_0) , то говорят, что функция $f(x, y)$ непрерывна в этой точке.

Определение 2. Если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, то функция $f(x, y)$

называется **непрерывной** в точке (x_0, y_0) , в противном случае функция имеет разрыв в этой точке.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна в этой точке. Дадим в точке (x_0, y_0) , приращения Δx и Δy аргументам x и y , тогда и функция z получит новое значение, равное $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Определение 3. Разность вида $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется **приращением функции** в точке (x_0, y_0) .

Итак, для того, чтобы функция $f(x, y)$ была непрерывной в точке (x_0, y_0) , необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δz в этой точке стремилось к нулю вместе с приращениями Δx и Δy аргументов x и y .

Определение 4. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области.

4. Частные производные и дифференцируемость

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Значение функции в этой точке обозначим через $z_0 = f(x_0, y_0)$. Дадим в точке (x_0, y_0) аргументу x приращение Δx , а переменная y пусть принимает постоянное значение, равное y_0 , тогда функция z получит приращение $\Delta_x z$ по переменной в точке (x_0, y_0) :

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \quad (1)$$

Приращение (1) называется частным приращением функции по переменной x .

Аналогично напишем частное приращение функции в точке (x_0, y_0) , по переменной y , а x будем считать постоянной, равной x_0 :

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Разделим обе части равенства (1) на приращение Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Определение 1. Если предел (2) существует, то он называется **частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке (x_0, y_0)** и обозначается одним из следующих символов:

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично определяется частная производная функции $f(x, y)$ по переменной y в точке (x_0, y_0) :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Итак, частной производной функции $f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Напомним, что полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующим приращениям Δx и Δy переменных x и y , называется функция

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (3)$$

где A и B — некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ функции.

Далее будем рассматривать функцию двух переменных как функцию точки $M(x, y)$, т. е. будем обозначать $z = f(x, y)$.

Теорема 1 (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M , то, как следует из соотношения (3), $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, а это

означает, что функция непрерывна в точке M .

Теорема доказана.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M , то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, причем

$$f'_x(x, y) = A, \quad f'_y(x, y) = B.$$

Доказательство. Так как функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M , то имеет место соотношение (3). Полагая $\Delta y = 0$, имеем:

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x, 0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$ функция. Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A.$$

Следовательно, в точке M существует частная производная $f'_y(x, y) = B$.

Что $f'_x(x, y) = A$, доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 3 (достаточные условия дифференцируемости). Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой δ -окрестности точки M и эти производные непрерывны в самой точке M , то функция дифференцируема в точке M .

Доказательство. Придадим переменным x и y столь малые приращения Δx и Δy , чтобы точка $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$ не выходила за пределы указанной δ -окрестности точки M . Полное приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

можно записать в виде:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (4)$$

Выражение $[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)]$ можно рассматривать как приращение функции $f(x, y + \Delta y)$ одной переменной x (второй аргумент имеет постоянное значение, равное $y + \Delta y$). Так как согласно условию эта функция имеет производную $f'_x(x, y + \Delta y)$, то по теореме Лагранжа получаем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, \\ 0 < \theta_1 < 1.$$

Рассуждая аналогично, для выражения имеем:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \\ 0 < \theta_2 < 1.$$

Производные непрерывны в точке $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y), \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ функции.

Подставляя полученные выражения в формулу (4) для Δz , находим

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

а это и означает, что функция $z = f(x, y)$, дифференцируема в точке M .

Теорема доказана полностью.

Следствие. Из непрерывности частных производных следует непрерывность самой функции.

5. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$.

Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие **производной по направлению**. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl , т. е. $\Delta l = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (в зависимости от расположения точки M_1).

Функция $f(M)$ получит при этом приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение 1. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ — при $\Delta l \rightarrow 0$ ($M \rightarrow M_1$), если он существует, называется производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т. е.

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Предположим теперь, что функция $f(M)$ дифференцируема в точке M . Тогда ее приращение в этой точке вдоль прямой L можно записать в виде:

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где α_1 и β_1 — бесконечно малые функции при $\Delta l \rightarrow 0$.

Разделив обе части равенства на Δl и учитывая, что $\Delta x = \Delta l \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta l \sin \alpha = \Delta l \cos \beta$. Переходя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \rightarrow 0$, получаем формулу для производной по направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что производная по направлению является линейной комбинацией частных производных, причем на-

правляющие косинусы являются как бы весовыми множителями, показывающими вклад в производную по направлению соответствующей частной производной.

Определение 2. Градиентом функции $z = f(x, y)$, в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x, y)$.

Обозначение:

$$\text{grad } z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\}.$$

Используя понятие градиента функции и учитывая, что вектор $\vec{l}$ имеет координаты $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, представим формулу (1) в виде скалярного произведения векторов $\text{grad } z$ и $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta = \text{grad } z \cdot \vec{l}. \quad (2)$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\text{grad } z \cdot \vec{l} = |\text{grad } z| \times |\vec{l}| \cos \varphi, \quad (3)$$

где $|\text{grad } z|$ — длина вектора $\text{grad } z$;
 φ — угол между векторами $\text{grad } z$ и $\vec{l}$.

Сравнивая формулы (2) и (3) и учитывая, что $|\vec{l}| = 1$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z| \cos \varphi.$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos \varphi = 1$ ($\varphi = 0$), т. е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением $\text{grad } z$. При этом $\frac{\partial z}{\partial l} = |\text{grad } z|$.

Таким образом, градиент функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Аналогично определяется производная по направлению для трех переменных $u = f(x, y, z)$, выводится формула:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

вводится понятие градиента

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(M)$, определенной в окрестности точки M , существуют в каждой точке этой окрестности. В этом случае частные производные представляют собой функции двух переменных x и y , определенные в указанной окрестности точки M . Назовем их **частными производными первого порядка**.

В свою очередь, частные производные по переменным x и y от функций $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке M , если они существуют, называются **частными производными второго порядка** от функции $z = f(M)$ в этой точке и обозначаются следующими символами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной, например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}.$$

Теорема (о равенстве смешанных производных). Если производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ существуют в некоторой δ -окрестности

точки $M(x, y)$ и непрерывны в самой точке M , то они равны между собой в этой точке, т. е. имеет место равенство

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],$$

где Δx и Δy — любые столь малые числа, что точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ находится в указанной δ -окрестности точки M .

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

тогда выражение A можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[x, x + \Delta x]$ функции $\varphi(x)$ одной переменной x :

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Поэтому, применяя к этой разности теорему Лагранжа, запишем:

$$A = \Delta\varphi = \varphi'(x + \theta_1\Delta x)\Delta x = [f'_x(x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \theta_1\Delta x, y)]\Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как приращение дифференцируемой на отрезке $[y, y + \Delta y]$ функции одной переменной y . Применяя еще раз теорему Лагранжа по переменной y , получаем

$$A = f''_{yx}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 \quad (1)$$

С другой стороны, если ввести вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

то, поступая аналогично, получим

$$A = \Delta\psi = \psi(y + \Delta y) - \psi(y),$$

а затем

$$A = f''_{xy}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x, 0 < \theta_3, \theta_4 < 1. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

$$f''_{yx}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y = f''_{xy}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x.$$

Переходя теперь в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность частных производных $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ в точке M , получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(x + \theta_1\Delta x, y + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y = \\ = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(x + \theta_4\Delta x, y + \theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x \end{aligned}$$

или

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Теорема доказана полностью.

Дифференциалы высших порядков

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \quad (3)$$

будем называть **дифференциалом первого порядка**. Для удобства условимся обозначать дифференциалы не только символом d , но и символом δ .

Пусть функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ дифференцируемы в точке M . Будем рассматривать dx и dy в выражении для dz как постоянные множители. Тогда функция dz представляет собой функцию

только переменных x и y , дифференцируемую в точке M , и ее дифференциал имеет вид:

$$\delta(dz) = \delta[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = [f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy]'_x \delta x + [f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy]'_y \delta y. \quad (4)$$

Дифференциал $\delta(dz)$ от дифференциала dz в точке M , взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется **дифференциалом второго порядка** функции $z = f(M)$ в точке M и обозначается d^2z . В свою очередь, дифференциал $\delta(d^2z)$ от d^2z , взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется **дифференциалом третьего порядка** функции $z = f(M)$ в точке M и обозначается d^3z и т. д. Дифференциал $\delta(d^{n-1}z)$ от дифференциала $d^{n-1}z$, взятый при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, называется **дифференциалом n -го порядка** функции $z = f(M)$ и обозначается $d^n z$.

Итак, для дифференциала n -го порядка функции $z = f(M)$ справедлива формула: $d^n z = \delta(d^{n-1}z) \big|_{\substack{\delta x=dx \\ \delta y=dy}}$.

При нахождении второго и последующих дифференциалов обычно вычисление $\delta(dz)$ и приравнивание дифференциалов аргументов ($\delta x = dx$, $\delta y = dy$) производится одновременно.

С помощью формулы (4) найдем выражение для дифференциала второго порядка:

$$\begin{aligned} d^2z &= \delta(d^{n-1}z) \big|_{\substack{\delta x=dx \\ \delta y=dy}} = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + f''_{xy} dx dy + f''_{yx} dy dx + f''_{yy}(dy)^2. \end{aligned}$$

Если $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ непрерывны, то согласно теореме о равенстве смешанных производных слагаемые $f''_{xy} dx dy$ и $f''_{yx} dy dx$ равны, так что

$$d^2z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Аналогично,

$$d^3z = f'''_{xxx}(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(dx)^2 dy + 3f'''_{xyy} dx (dy)^2 + f'''_{yyy}(dy)^3,$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ d^n z &= f_{x^n}^{(n)}(dx)^n + n f_{x^{n-1}y}^{(n)}(dx)^{n-1} dy + \dots + \\ & + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} f_{x^{n-k}y^k}^{(n)}(dx)^{n-k} (dy)^k + \dots + f_{y^n}^{(n)}(dy)^n. \end{aligned}$$

Формула для $d^n z$ напоминает разложение двучлена в n -й степени по формуле Ньютона. Поэтому выражение для $d^n z$ символически можно записать в виде, более удобном для запоминания:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y).$$

7. Формула Тейлора для функции двух переменных

Теорема. Пусть функция $z = f(M)$ непрерывна вместе со всеми частными производными до $(n+1)$ -го порядка включительно в некоторой δ -окрестности точки $M(x, y)$. Пусть точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности. Тогда приращение $\Delta f = f(M_1) - f(M)$ этой функции в точке M можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Delta f &= df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \\ &+ \frac{d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой Тейлора для функции $z = f(M)$.

Доказательство. Для доказательства введем вспомогательную функцию $F(t) = f(x + t \Delta x, y + t \Delta y)$, которая является сложной функцией независимой переменной t , изменяющейся в пределах от 0 до 1, и имеет $(n+1)$ -ю производную по t на отрезке.

Дифференцируя функцию $F(t)$ по t , получаем

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'_x(x + t \Delta x, y + t \Delta y) \Delta x + f'_y(x + t \Delta x, y + t \Delta y) \Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(x + t \Delta x, y + t \Delta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F''(t) &= f''_{xx}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\
&+ f''_{yy}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)(\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x + \\
&\quad + t\Delta x, y + t\Delta y)
\end{aligned}$$

По индукции найдем:

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x + t\Delta x, y + t\Delta y), \\
F^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x + t\Delta x, y + t\Delta y).
\end{aligned}$$

С другой стороны, применяя к функции $F(f)$, как функции одной переменной t , формулу Маклорена и полагая $t = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
F(1) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \\
&\quad + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Но

$$\begin{aligned}
F(1) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(M_1), \\
F(0) &= f(x, y) = f(M), \\
F'(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right) f(x, y) = df(x, y), \\
F''(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x, y) = d^2 f(x, y), \\
&\quad \dots \\
F^{(n)}(0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x, y) = d^n f(x, y),
\end{aligned}$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y) = \\ = d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y).$$

Учитывая эти равенства, из формулы (2) имеем

$$F(1) - F(0) = f(M_1) - f(M) = \Delta f = df(x, y) + \frac{d^2 f(x, y)}{2!} + \dots + \\ + \frac{d^n f(x, y)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x + \theta \Delta x, y + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

т. е. получена формула (1).

8. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0 , в которой для любой точки $M(x, y)$ выполняется неравенство:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума. Из определения следует, что если функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке M_0 , то полное приращение этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки одному из следующих условий:

$\Delta z \leq 0$ — в случае локального максимума,

$\Delta z \geq 0$ — в случае локального минимума.

И, наоборот, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция имеет экстремум в точке M_0 .

Теорема (необходимое условие экстремума). Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0

частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (1)$$

Доказательство. Докажем, например, равенство нулю частной производной $f'_x(x_0, y_0)$. Для этого рассмотрим в окрестности точки M_0 только те точки, для которых $y = y_0$. Полученная функция одной переменной x имеет в точке $x = x_0$ производную $f'_x(x_0, y_0)$. Следовательно, в этой точке выполняется необходимое условие экстремума функции одной переменной:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, рассматривая функцию $f(x_0, y)$ одной переменной y , находим $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Теорема доказана.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ возможного экстремума и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

- 1) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ — локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ — локальный минимум;
- 2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума.

Доказательство. Пусть $\Delta > 0$. Введем следующие обозначения:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B \quad \text{и} \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

По условию $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, $A > 0$ (или $A < 0$). Согласно формуле Тейлора для $n = 1$ полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0 можно записать в виде:

$$\Delta f = \frac{1}{2!} [A'(\Delta x)^2 + 2B'\Delta x \Delta y + C'(\Delta y)^2], \quad (1)$$

где $A' = f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$,
 $B' = f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$,
 $C' = f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$ Из непрерывности частных производных второго порядка в точке M_0 следует:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} A' = f''_{xx}(x_0, y_0) = A > 0 \text{ или } A < 0.$$

а также

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A'C' - B'^2) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 = \Delta > 0.$$

Поэтому для достаточно малых Δx и Δy имеем

$$A' > 0 \text{ (или } A' < 0), \quad A'C' - B'^2 = \Delta' > 0.$$

Так как $A' \neq 0$, то соотношение (1) можно переписать в виде:

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{A'} [A'^2(\Delta x)^2 + 2A'B'\Delta x\Delta y + A'C'(\Delta y)^2]$$

или, дополняя до полного квадрата,

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{A'} [(A'\Delta x + B'\Delta y)^2 + (A'C' - B'^2)(\Delta y)^2].$$

Выражение в квадратных скобках неотрицательно, поэтому если $A' > 0$, то $\Delta f \geq 0$, и, следовательно, в точке M_0 — локальный минимум; если же $A' < 0$, то $\Delta f \leq 0$, $\Delta f \geq 0$, и, следовательно, в точке M_0 — локальный максимум, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\Delta = AC - B^2 < 0$ и по-прежнему $A' = f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $B' = f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$, $C' = f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$.

Рассмотрим многочлен $A + 2Bx + Cx^2$.

Так как $B^2 - AC > 0$, то можно указать такие два числа x_1 и x_2 , что

$$A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0, A + 2Bx_2 + Cx_2^2 > 0.$$

Полное приращение функции $f(x, y)$ в точке M_0 , запишем в виде (1). В силу непрерывности частных производных второго порядка

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A' + 2B'x_1 + C'x_1^2) = A + 2Bx_1 + Cx_1^2 > 0.$$

Следовательно, существует такая δ -окрестность точки M_0 , что если точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности, то

$$A' + 2B'x_1 + C'x_1^2 > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь такую произвольную δ -окрестность точки M_0 , что $\delta' \leq \delta$. Можно выбрать число $t > 0$ столь малым, что точка $M_1(x + t, y + tx_1)$ будет принадлежать δ -окрестности точки M_0 .

Полагая в (1) $\Delta x = t$, $\Delta y = tx_1$, в силу (2) получаем

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2!} t^2 [A' + 2B'x_1 + C'x_1^2] > 0. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично относительно значения x_2 , получим, что в произвольной δ -окрестности точки M_0 существует точка $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$, для которой

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0,$$

т. е. приращение функции $f(x, y)$ в сколь угодно малой окрестности точки M_0 не сохраняет знак и, следовательно, в точке M_0 нет экстремума.

Теорема доказана полностью.

9. Двойной интеграл

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных.

Пусть G — некоторая замкнутая ограниченная область, а $z = f(x, y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области.

Предполагается, что граница области G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — непрерывные функции.

Разобьем область G произвольно на n частей G_i , не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$. В каждой части G_i выберем произвольную точку (ξ_i, η_i) и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i, \quad (1)$$

которую назовем **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ в области G . Назовем диаметром $d(G)$ области G наибольшее расстояние между граничными точками этой области. Обозначим через λ наи-

больший из диаметров частичных областей $G_i (\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(G_i)\})$.

Определение 1. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , не зависящий ни от способа разбиения области G на подобласти G_i , ни от выбора точек (ξ_i, η_i) , то этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается следующим символом:

$$I = \iint_G f(x, y) ds.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области G , G — область интегрирования, ds — элемент площади.

Теорема 1. Функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области G , интегрируема в этой области.

Однако не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций. Имеет место более общая теорема.

Теорема 2. Функция $f(x, y)$, ограниченная в замкнутой ограниченной области G и непрерывная в ней всюду, кроме точек, лежа-

щих на конечном числе кривых, являющихся графиком непрерывных функций вида $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$, интегрируема в этой области.

Рассмотрим свойства двойного интеграла.

1. Если k — произвольное число и функция $f(x, y)$ интегрируема в области G , то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в G и

$$\iint_G kf(x, y) dx dy = k \iint_G f(x, y) dx dy,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области G , то их алгебраическая сумма также интегрируема в этой области и

$$\iint_G [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy \pm \iint_G g(x, y) dx dy.$$

3. Если область G является объединением областей G_1 и G_2 , не имеющих общих внутренних точек, в каждой из которых функция $f(x, y)$ интегрируема, то в области G эта функция также интегрируема и

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy.$$

4. **Теорема (о среднем).** Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G , то в этой области найдется такая точка (ξ_i, η_i) , что

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(\xi_i, \eta_i) s,$$

где s площадь фигуры G .

Сведение двойного интеграла к повторному

Случай прямоугольной области. Рассмотрим двойной интеграл по некоторому прямоугольнику D со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема. Пусть для функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ существует двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Пусть далее для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (4)$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник D с помощью точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$ на n_k частичных прямоугольников $D_{ij} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$. Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ и обозначим через m_{ij} и M_{ij} соответственно точную нижнюю и верхнюю грани функции $f(x, y)$ на частичном прямоугольнике D_{ij} . Тогда всюду на этом прямоугольнике

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}. \quad (5)$$

Положим в этом неравенстве $x = \xi_i$, где ξ_i — произвольная точка отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, и затем проинтегрируем (4) по y в пределах от y_{j-1} до y_j .

Получим

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j. \quad (6)$$

Суммируя (6) по всем j от 1 до k и используя обозначение (2), имеем:

$$\sum_{j=1}^k m_{ij}\Delta y_j \leq I(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^k M_{ij}\Delta y_j. \quad (7)$$

Далее, умножая (7) на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до n , получаем:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n I(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j. \quad (8)$$

Пусть наибольший диаметр частичных прямоугольников D_i стремится к нулю ($\lambda \rightarrow 0$). Тогда и наибольшая из длин $\Delta x_i \rightarrow 0$. Крайние члены в (8), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, стремятся при этом к двойному интегралу (1). Таким образом, существует предел и среднего члена (8), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению определенного интеграла равен:

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Тем самым доказано существование повторного интеграла и равенство (4).

Теорема доказана.

Рассмотрим случай криволинейной области.

Теорема. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции, $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $a \leq x \leq b$. Пусть также существует двойной интеграл $\iint f(x, y)dx dy$ и для каждого x из $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (9)$$

Доказательство. Положим $c = \min_{[a,b]} y_1(x)$, $d = \max_{[a,b]} y_2(x)$ и заключим область G в прямоугольник $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Рассмотрим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{в точках области } G, \\ 0 & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, она интегрируема в области G , так как совпадает в ней с $f(x, y)$, и интегрируема в остальной части $D-G$ прямоугольника D , где она равна нулю. Следовательно, согласно третьему свойству двойного интеграла она интегрируема и по всему прямоугольнику D . При этом

$$\iint_G F(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy$$

и

$$\iint_{D-G} F(x, y) dx dy = 0,$$

откуда

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Далее для каждого x из $[a, b]$ существует интеграл

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy,$$

так как существует каждый из трех интегралов, стоящих справа. Действительно, отрезки $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ лежат вне области G и на них $F(x, y)$ равна нулю, отсюда первый и третий интегралы равны нулю, а второй интеграл существует по условию, так как $F(x, y) = f(x, y)$ на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$. Поэтому

$$\int_c^d F(x, y) dx dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (11)$$

Таким образом, для функции $F(x, y)$ выполнены все условия теоремы для случая прямоугольной области и, следовательно, двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику D может быть сведен к повторному

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

Отсюда из равенств (10) и (11) получаем:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

т. е. формулу (9).

Теорема доказана.

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области G . Тогда для функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy. \quad (12)$$

Предположим далее, что с помощью формул

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (13)$$

мы переходим к новым переменным u и v . Будем считать, что u и v определяются из (13) единственным образом:

$$u = u(x, y), v = v(x, y) \quad (14)$$

С помощью формул (14) каждой точке $M(x, y)$ из области G ставится в соответствие некоторая точка $M^*(x, y)$ на координатной плоскости с прямоугольными координатами u и v . Пусть множество всех точек $M^*(u, v)$ образует ограниченную замкнутую область G^* . Формулы (13) называют формулами преобразования координат, а формулы (14) — формулами обратного преобразования.

При сделанных предположениях можно доказать, что если функции (2) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и если определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (15)$$

отличен в G^* от нуля, то для интеграла (12) справедлива формула замены переменных:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (16)$$

Определитель (15) называется **функциональным определителем**, или **якобианом** (по имени немецкого математика К. Г. Якоби), функций $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ по переменным u и v .

Теорема. Если преобразование (13) переводит замкнутую ограниченную область G^* в замкнутую ограниченную область G и является взаимно однозначным и если функции (13) имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан (15), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G , то справедлива формула замены переменных (16).

10. Криволинейные интегралы

Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащий на плоскости.

Интегралы такого рода называются **криволинейными**.

Различают два типа криволинейных интегралов: криволинейные интегралы первого и второго рода.

Криволинейные интегралы первого рода

Определение 1. Кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, называется **гладкой**, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, не обращающиеся в нуль одновременно (тем самым кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется кусочно-гладкой.

Рассмотрим на плоскости O_{xy} некоторую кривую AB , гладкую или кусочно-гладкую, и предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой AB .

Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками $A = M_0$, M_1 , M_2 , ..., M_{i-1} , M_i , ..., M_{n-1} , $M_n = B$, выберем на каждой из частичных дуг $M_{i-1}M_i$ произвольную точку M_i^* и составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i^*) \Delta l_i, \quad (1)$$

где Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$.

Сумма (1) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y) = f(M)$ по кривой AB . Обозначим через λ наибольшую из длин частичных дуг $M_{i-1}M_i$ ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta l_i\}$).

Определение 2. Если интегральная сумма при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции $F(x, y)$ по кривой AB и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \int_{AB} f(M)dl = \int_{AB} f(x, y)dl.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется **интегрируемой вдоль кривой AB** , сама кривая AB — это контур интегрирования, A — начальная, а B — конечная точки интегрирования.

Криволинейные интегралы второго рода

Пусть на кривой AB определены две ограниченные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n = B$. Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат, на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмем произвольную точку M_i^* и составим интегральную сумму для функции $P(x, y)[Q(x, y)]$:

$$\sum_{i=1}^n P(M_i^*)\Delta x_i \left[\sum_{i=1}^n Q(M_i^*)\Delta y_i \right]. \quad (2)$$

Определение 3. Если интегральная сумма (2) при $\lambda \rightarrow 0$ ($\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta l_i\}$, Δl_i — длина дуги $M_{i-1}M_i$) имеет предел, равный I ,

то этот предел называется **криволинейным интегралом второго рода** от функции $P(x, y)[Q(x, y)]$ по кривой AB и обозначается символом $\int_{AB} P(x, y) dx \left[\int_{AB} Q(x, y) dy \right]$.

Сумму $\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$ называют **общим криволиней-**

ным интегралом второго рода и обозначают символом $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

11. Поверхностные интегралы

В этом параграфе рассмотрены интегралы от функций, заданных на поверхности, так называемые **поверхностные интегралы**.

Различают поверхностные интегралы первого и второго рода.

Поверхностный интеграл первого рода

Дадим сначала определение гладкой и кусочно-гладкой поверхности.

Поверхность называется **гладкой**, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, которые ориентированы непрерывно, называется **кусочно-гладкой**.

Пусть в точках некоторой поверхности S гладкой или кусочно-гладкой определена ограниченная функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S произвольно на n -частей с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i. \quad (1)$$

Сумма (1) называется **интегральной суммой** для функции $f(M)$ по поверхности S . Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности.

Определение 1. Если интегральная сумма (1) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S f(M) dS = \iint_S f(x, y, z) dS.$$

В этом случае функция $f(x, y, z)$ называется **интегрируемой по поверхности S** , где S — это поверхность интегрирования.

Данное определение, по сути, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов и условия их существования без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы.

Поверхностный интеграл второго рода

Введем предварительно понятие стороны поверхности.

Возьмем на гладкой поверхности S произвольную точку M и проведем через нее нормаль к поверхности (вектор n). Рассмотрим теперь на поверхности какой-либо замкнутый контур, проходящий через точку M и не имеющий общих точек с границей поверхности S . Будем перемещать точку M по заданному контуру вместе с вектором n так, чтобы вектор n все время оставался нормальным к S и чтобы его направление менялось при этом перемещении непрерывно. В начальное положение точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

Если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется **двусторонней**.

Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, любая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ — функции, непрерывные в некоторой области G плоскости O_{xy} .

Если же на поверхности S существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется после возвращения в исходную точку на противоположное, то поверхность называется **односторонней**.

В дальнейшем рассматриваются только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности совокупность всех ее точек с выбранным в них направлением нормали, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется **стороной поверхности**, а выбор определенной ее стороны — **ориентацией поверхности**. Двустороннюю поверхность называют также **ориентируемой**, а одностороннюю — **неориентируемой**.

Пусть S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, а $R(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная в точках поверхности S . Выберем одну из двух сторон поверхности, т. е. одно из двух возможных направлений нормали в точках поверхности (тем самым мы ориентировали поверхность). Если нормали составляют острые углы с осью O_z , то будем говорить, что выбрана верхняя сторона поверхности $z = f(x, y)$, если тупые углы — то нижняя сторона поверхности. Разобьем поверхность S произвольно на n частей и обозначим через G_i проекцию i -й части поверхности

на плоскость O_{xy} . Выбрав на каждой частичной поверхности произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, составим сумму:

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i, \quad (2)$$

где Δs_i — площадь G_i , взятая со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности S , и со знаком минус, если выбрана нижняя сторона поверхности S . Сумма (2) называется интегральной суммой функции $R(M) = R(x, y, z)$. Обозначим через λ наибольший из диаметров частей поверхности S .

Определение 2. Если интегральная сумма (2) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел, равный I , то этот предел называется **поверхностным интегралом второго рода** от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S R(M) dx dy = \iint_S R(x, y, z) dx dy.$$

В этом случае функция $R(x, y, z)$ называется интегрируемой по поверхности S по переменным x и y .

Аналогично определяется поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности S , по переменным y и z (z и x) от функции $P(x, y, z)$ [$Q(x, y, z)$], которая определена на поверхности S :

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz \left[\iint_S Q(x, y, z) dz dx \right]$$

Сумму

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + \iint_S Q(x, y, z) dz dx + \iint_S R(x, y, z) dx dy$$

называют общим поверхностным интегралом второго рода и символом

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл первого рода, но, в отличие от последнего, при изменении стороны поверхности (переориентации) он меняет знак.

12. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами.

Докажем эту формулу для замкнутой области, граница которой пересекается прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках. Для краткости будем называть такие области **простыми**. Предполагается, что контур, ограничивающий область, гладкий или кусочно-гладкий.

Теорема. Пусть G — некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром L , и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области. Тогда имеет место формула

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy, \quad (1)$$

которая называется формулой Грина.

Доказательство. Пусть контур L , ограничивающий область G , может быть задан как уравнениями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ ($c \leq y \leq d$), $x_1(y) \leq x_2(y)$ и уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$), $y_1(x) \leq y_2(x)$. Рассмотрим сначала область G , определенную неравенствами

$a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, и преобразуем двойной интеграл $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$

в криволинейный. Для этого сведем его к повторному интегралу по формуле Ньютона-Лейбница, выполним интегрирование по y .

Получим:

$$\begin{aligned}\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx.\end{aligned}$$

Каждый из этих двух определенных интегралов равен криволинейному интегралу второго рода, взятому по соответствующей кривой, а именно:

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x, y_2(x)) dx &= \int_{ADB} P(x, y) dx = - \int_{BDA} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \int_{ACB} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \left[\int_{BDA} P(x, y) dx + \int_{ACB} P(x, y) dx \right],$$

т. е.

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_L P(x, y) dx. \quad (2)$$

Аналогично доказывается формула

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q(x, y) dy \quad (3)$$

(при этом область G задается неравенствами $c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$).

Вычитая из равенства (3) почленно равенство (2), получаем искомую формулу (1).

Теорема доказана.

ЛЕКЦИЯ № 4. Ряды

1. Числовые ряды

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \quad (1)$$

Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (2)$$

называется **бесконечным числовым рядом**, или просто числовым рядом, числа a_1, a_2, a_3 — это члены ряда, а a_n — общий член ряда.

Таким образом, мы перешли от последовательности (1) к ряду (2).

Пользуясь знаком суммы, ряд (2) можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где } n \text{ принимает значения от } 1 \text{ до } +\infty.$$

Если общий член ряда задан формулой или неизвестен другой способ получения члена ряда с любым номером, то ряд (2) будем считать заданным.

Суммы вида

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

называются **частичными суммами ряда** (2).

Здесь, наоборот, от ряда (2) перешли к числовой последовательности

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n \quad (3)$$

Если последовательность частичных сумм имеет конечный предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (4)$$

то этот предел называется **суммой ряда** и ряд называется **сходящимся**.

Если предел (4) не существует или равен бесконечности, то ряд расходится и суммы не имеет.

Теорема (необходимое условие сходимости рядов). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство. По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обозначим

через S его сумму. Рассмотрим частичные суммы ряда $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Отсюда

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Так как $S_n \rightarrow S$ и $S_{n-1} \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых достаточных условий сходимости рядов с неотрицательными членами. Предварительно докажем теорему, которая будет использована в предыдущих рассуждениях.

Теорема 1. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными чле-

нами сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограниченной.

Доказательство.

Необходимость. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Это значит, что последовательность его частичных сумм имеет предел, а всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность: $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$. В силу теоремы о монотонных ограниченных последовательностях она сходится, т. е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема доказана полностью.

Теорема (признак сравнения). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичные суммы рядов членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Из неравенства $a_n \leq b_n$ следует, что

$$S_n \leq \sigma_n. \quad (5)$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по предыдущей теореме последовательность его частичных сумм является ограниченной, т. е. для

любого n $\sigma_n \leq M$, где M — некоторое число. Но тогда по формуле (5) и $S_n \leq M$, откуда по предыдущей теореме следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, так как, допустив сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, получим по только что доказанному сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а это противоречит условию теоремы.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Теорема (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда:

- 1) при $\rho < 1$ ряд сходится,
- 2) при $\rho > 1$ ряд расходится.

Доказательство. Пусть $\rho < 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По определению предела числовой последовательности для $\varepsilon < 1$ существует такой номер N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon. \quad (6)$$

Так как $\rho < 1$, ε можно взять настолько малым, что будет выполнено неравенство $\rho + \varepsilon < 1$. Полагая $\rho + \varepsilon = q$, на основании правого из неравенств (6) имеем $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ или $a_{n+1} < a_n q$ для $n = N, N+1 < N+2, \dots$

Придавая n эти значения, из последнего неравенства получаем:

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< a_N q, \\ a_{N+2} &< a_{N+1} q < a_N q^2, \\ a_{N+3} &< a_{N+2} q < a_{N+1} q^2 < a_N q^3 \dots \end{aligned}$$

т. е. члены ряда (7) меньше соответствующих членов ряда, составленного из элементов геометрической прогрессии:

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \dots \quad (8)$$

Так как $q < 1$, то ряд (8) сходится. Тогда согласно признаку сравнения ряд (7) также сходится. Но ряд (7) получен из данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в результате отбрасывания конечного числа первых

членов, следовательно, по свойству сходящихся рядов ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть теперь $\rho > 1$. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Возьмем

ε настолько малым, что выполняется неравенство $\rho - \varepsilon < 1$. Тогда при $n \geq N$ в силу левого из неравенств (6) выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда, начиная

с некоторого номера N , возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

но, по необходимому условию сходимости ряда, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема доказана полностью.

Теорема (интегральный признак). Пусть дан ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале $[1, +\infty)$.

Тогда если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, если же $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, с боковых сторон — прямыми $x = 1$, $x = n$, снизу — осью O_x . Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, ..., $[n-1, n]$ и высотами $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n-1), f(n)$. Тогда, принимая во внимание геометрический смысл определенного интеграла, имеем:

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

или короче:

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n - f(n).$$

Отсюда получаем

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx, \quad (9)$$

$$S_n > f(n) + \int_1^n f(x)dx, \quad (10)$$

где S_n — частные суммы рассматриваемого ряда.

Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Это значит, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = I. \text{ Так как } f(x) > 0, \text{ то последовательность } \int_1^n f(x)dx$$

возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом:

$\int_1^n f(x)dx < I$. Из неравенства (9) следует, что $S_n < f(1) + I$, т. е. по-

следовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ является

ограниченной. По теореме (1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

Пусть теперь интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится. В этом случае

$\int_1^n f(x)dx \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (как монотонно возрастающая неограни-

ченная последовательность). Из неравенства (10) следует, что $S_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. последовательность частичных сумм $\{S_n\}$

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится и, следовательно, ряд расходится.

Теорема доказана полностью.

2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим теперь ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются **знакопеременными** рядами.

Возьмем какой-нибудь знакопеременный ряд:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

где числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде произвольно. Одновременно рассмотрим ряд из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема (критерий Коши). Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Доказательство. Пусть ряд (2) сходится. Обозначим через S_n частную сумму ряда (1), а через σ_n частичную сумму ряда (2):

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

$$\sigma_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|.$$

Так как ряд (2) сходится, то последовательность его частичных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, при этом для любого n имеет место неравенство

$$\sigma_n \leq \sigma, \quad (3)$$

поскольку члены ряда (2) неотрицательны.

Обозначим через S'_n сумму положительных членов, а через S''_n — сумму модулей отрицательных членов, содержащихся в сумме S_n .

Тогда

$$S_n = S'_n - S''_n, \quad (4)$$

$$\sigma_n = S'_n + S''_n. \quad (5)$$

Очевидно, последовательности $\{S'_n\}$ и $\{S''_n\}$ не убывают, а из равенства (5) и неравенства (3) следует, что они являются ограниченными:

$$S'_n \leq \sigma_n \leq \sigma \text{ и } S''_n \leq \sigma_n \leq \sigma.$$

Следовательно, существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S''$. Но в таком случае в силу равенства (4) последовательность частичных сумм ряда (1) имеет предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n - S''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = S' - S''.$$

Это означает, что ряд (1) сходится.

Теорема доказана.

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. Так, например,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ согласно признаку Лейбница сходится, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

К абсолютно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, также сходятся.

К условно сходящимся рядам относятся сходящиеся ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

3. Функциональные последовательности и ряды

В настоящем параграфе будут рассматриваться последовательности и ряды, членами которых являются некоторые, вообще говоря, комплекснозначные, функции; т. е. последовательности

$$f(x) = n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

и, соответственно, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (2)$$

При каждом фиксированном значении аргумента эти последовательности и ряды представляют собой уже рассматривавшиеся числовые последовательности и ряды.

Пусть E — некоторое множество элементов, в частности множество точек прямой, плоскости или вообще n -мерного пространства, и пусть (1) — последовательность функций, которые определены на множестве E и значениями которых являются, вообще говоря, комплексные числа.

Определение 1. Пусть задана последовательность функций (1) и функция f , определенная на множестве E . Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции f равномерно на множестве E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что если $N \geq n$, то

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

для всех $x \in E$.

Последовательность (1) называется **равномерно сходящейся** на множестве E , если существует функция f , к которой она равномерно сходится на E .

Очевидно, что если последовательность (1) равномерно сходится к функции f на множестве E , то она и просто сходится к этой функции на E .

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E к функции f , то мы будем это символически записывать следующим образом:

$$f_n \rightarrow f \text{ на } E.$$

Если же эта последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f , то мы будем писать: $f_n \Rightarrow f$ на E .

Сущность равномерной сходимости последовательности функций состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать номер N , зависящий только от заданного ε и не зависящий от выбора точки x .

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательностей). Для того, чтобы последовательность функций f_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, определенных на некотором множестве E , равномерно сходилась на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы

для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех $N \geq n$, всех целых $p \geq 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E . Тогда согласно определению равномерной сходимости существует такая функция f , что для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех $N \geq n$ и всех точек $x \in E$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $N \geq n$ и $p \geq 0$, то для всех $x \in E$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Если выполнено условие (4), то при любом фиксированном $x \in E$ последовательность

$$f_n(x), n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

является числовой последовательностью, удовлетворяющей условию Коши, и поэтому сходится.

Обозначим предел последовательности (5) на множестве E через $f(x)$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f на множестве E . Действительно, в силу условия (4), чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех $N \geq n$, всех целых $p \geq 0$ и всех точек $x \in E$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Замечая, что $\lim_{p \rightarrow \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$, перейдем к пределу в неравенстве (6) при $p \rightarrow \infty$, тогда для всех $N \geq n$ и всех $x \in E$ получим:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а это и означает, что $f_n \Rightarrow f$ на E .

Теорема доказана.

Теорема (признак Вейерштрасса). Если существует такая числовая последовательность $\{a_n\}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad a_n \geq 0, \quad (7)$$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq a_n \quad (8)$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$, и всех $x \in E$, то последовательность $\{f_n\}$ равномерно на E сходится к функции f .

Доказательство. В силу условия (7) для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что $a_n < \varepsilon$ для всех $N \geq n$. Но тогда в силу условия (8)

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $N \geq n$ и всех $x \in E$, а это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f на множестве E .

Теорема доказана.

Для рядов тоже можно ввести понятие равномерной сходимости.

Определение 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (9)$$

члены которого являются функциями, определенными на множестве E , называется **равномерно сходящимся** на этом множестве, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на E .

Таким образом, равномерная сходимость ряда (9) означает существование такой функции $s(x)$, что

$$s_n(x) \Rightarrow s(x) \text{ на } E. \quad (10)$$

Поскольку из (10) следует, что $s_n(x) \rightarrow s(x)$ на E , то $s(x)$ является суммой ряда (9).

Положим

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Тогда $s(x) - s_n(x) = r_n(x)$ и условие (10) можно переписать в эквивалентной форме:

$$r_n(x) \Rightarrow 0 \text{ на } E, \quad (11)$$

откуда следует, что, для того чтобы сходящийся на E ряд (9) равномерно сходил на множестве E , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |r_n(x)| = 0. \quad (12)$$

Таким образом, из равномерной сходимости ряда, в частности, вытекает, что начиная с некоторого номера верхние грани $\sup_{x \in E} |r_n(x)|$ конечны, а условие (12) сводит понятие равномерной сходимости ряда к стремлению к нулю числовой последовательности этих верхних граней.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости рядов).

Для того, чтобы ряд (9) равномерно сходил на множестве E , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех номеров $N \geq n$, всех целых $p \geq 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (13)$$

Следствие (необходимое условие равномерной сходимости ряда).
Если ряд (9) сходится на множестве E , то

$$u_n(x) \Rightarrow 0 \text{ на } E. \quad (14)$$

Условие (14) получается из (13), если положить $p = 0$.

Теорема (признак Вейерштрасса — достаточный признак сходимости ряда). Пусть даны два ряда: функциональный (9), членами которого являются функции, определенные на множестве E , и числовой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Если ряд (15) сходится и

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

то ряд (9) абсолютно и равномерно сходится на множестве E .

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (9) на E в случае сходимости ряда (15) сразу следует по признаку сравнения из неравенства (16).

Докажем равномерную сходимость. Если ряд (15) сходится, то в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что $\sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$ для всех номеров $N \geq n$ и всех целых $p \geq 0$. Отсюда

и из (16) следует, что

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

для всех $N \geq n$ и всех $x \in E$.

Поэтому в силу критерия Коши для равномерной сходимости ряда ряд (9) равномерно сходится на множестве E .

Теорема 1. Если функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ непрерывны на множестве $E \subset E^n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , то

его сумма $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также непрерывна на E .

Теорема 2. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (17)$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt, \quad (18)$$

также равномерно сходится на $[a, b]$, и если

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (19)$$

то

$$\int_a^x s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (20)$$

Если эту формулу переписать в виде:

$$\int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt,$$

то видно, что она законна в условиях предыдущей теоремы почленного интегрирования ряда.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ряда (17), согласно теореме 1 функция $s(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, $a \leq x < b$.

Покажем, что ряд (18) равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к функции

$$\int_a^x s(t) dt. \quad (21)$$

Пусть $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ и $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$.

Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x s(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(t) dt \right| &= \left| \int_a^x s(t) dt - \int_a^x \left[\sum_{k=1}^n u_k(t) \right] dt \right| = \\ &= \int_a^x |r_n(t)| dt \leq \sup_{[a, x]} |r_n(t)| \int_a^x dt \leq (x-a) \sup_{[a, x]} |r_n(t)| \leq (b-a) \sup_{[a, b]} |r_n(x)|. \end{aligned} \quad (22)$$

Последовательность $\sup_{[a, b]} |r_n(x)|$, $n = 1, 2, 3, \dots$ является число-

вой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (17)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[a, b]} |r_n(x)| = 0$, поэтому из неравенства (22) согласно признаку

Вейерштрасса для равномерной сходимости последовательности следует, что последовательность частичных сумм ряда (18) равномерно сходится к функции (21), а это и означает равномерную сходимость ряда (18) к функции (21). Теорема и формула (20) доказаны.

Теорема 3. Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд, составленный из их производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad (23)$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Тогда, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a, b]$, то он сходится равномерно на всем отрезке $[a, b]$, его сумма

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (24)$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (25)$$

Если эту формулу переписать в виде:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

то видно, что она законна при сделанных предположениях почленного дифференцирования ряда.

Доказательство. Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad (26)$$

в силу равномерной сходимости этого ряда его можно почленно интегрировать:

$$\int_c^x \sigma(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)] \quad a \leq x \leq b. \quad (27)$$

По теореме 2 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(c)] \quad a \leq x \leq b, \quad (28)$$

сходится. Сходится по условию теоремы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \quad (29)$$

поэтому и сходится сумма рядов (28) и (27), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (30)$$

Поэтому (27) можно переписать в виде:

$$\int_c^x \sigma(t) dt = s(x) - s(c). \quad (31)$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, имеет производную по x , значит, и функция $s(x)$ также имеет производную.

Дифференцируя равенство (31), получим

$$s'(x) = \sigma(x), \quad (32)$$

где функция $\sigma(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией, ибо представляет собой сумму равномерно сходящегося ряда (23), члены которого — непрерывные функции. Подставляя (26) в (32), мы получаем искомую формулу (25).

Остается лишь отметить, что из равенства (27) в силу доказанной сходимости рядов (28) и (29) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u'_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u'_n(t) dt$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ — числовой ряд, поэтому и их сумма, т. е. ряд (24), равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

Теорема доказана.

4. Степенные ряды

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \quad (1)$$

называется **степенным рядом**.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называются **коэффициентами степенного ряда**.

Придавая x различные числовые значения, будем получать различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися. Множество тех значений x , при которых ряд (1) сходится, называется областью сходимости, это множество всегда не пусто, так как любой степенной ряд сходится при $x = 0$.

Теорема (Абеля). 1. Если степенной ряд (1) сходится при $x = x_0$ ($x \neq x_0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

2. Если ряд (1) расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$.

Доказательство.

1. Так как, по условию, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится, то его общий член $a_n x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда следует, что последовательность $\{a_n x_0^n\}$ является ограниченной, т. е. существует такое число $M > 0$, что

$$|a_n x_0^n| < M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Перепишем ряд (1) в виде:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \quad (3)$$

и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left| \frac{x}{x_0} \right| + |a_2 x_0^2| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad (4)$$

Члены ряда (4) в силу неравенства (2) меньше соответствующих членов ряда:

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (5)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (5) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ и, следовательно, сходится.

Так как члены ряда (4) меньше соответствующих членов ряда (5), то по признаку сравнения ряд (4) также сходится, а это значит, что ряд (1) при $|x| < |x_0|$ сходится абсолютно.

2. Докажем теперь вторую часть теоремы. По условию в точке x_1 ряд (1) расходится. Требуется показать, что он расходится для всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$. Предположим обратное, т. е. допустим, что при таком некотором значении x , что $|x| > |x_1|$, ряд (1) сходится. Тогда по только что доказанной первой части теоремы ряд (1) должен сходиться и в точке x_1 , так как $|x| > |x_1|$. Но это противоречит тому, что в точке x_1 ряд расходится.

Теорема доказана полностью.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится не при всех значениях x

и не только при $x = 0$, то существует такое число $R > 0$, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство. Обозначим через X множество точек x , в которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Покажем, что множество X является

ограниченным. Действительно, если взять точку x_1 , в которой ряд расходится (по условию такие точки существуют), то по теореме Абеля для любого x из X выполняется неравенство $|x| < |x_1|$.

Известно, что у ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань. Положим $R = \sup_{x \in X} |x|$. Так как ряд сходится не только при $x = 0$, то $R > 0$.

Возьмем теперь любое x , для которого $|x| < R$. Согласно свойству точной верхней грани, найдется такое $x_0 \in X$, что $|x| < |x_0| < R$, откуда, по теореме, Абеля следует абсолютная сходимость ряда при взятом x .

Возьмем теперь любое x , для которого $|x| > R$. Такое $x \in X$. Следовательно, при этом x ряд расходится.

Теорема доказана.

Таким образом, решен вопрос об области сходимости степенного ряда. Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости**

степенного ряда. Число R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Отметим, что интервал сходимости некоторых степенных рядов охватывает всю числовую прямую (в этом случае пишут $R = \infty$), у других вырождается в одну точку ($R = 0$).

Разложение функции в степенные ряды

Как показывает следующая теорема, разложение функции в степенные ряды единственно.

Теорема

Если функция $f(x)$ на интервале $(-R; R)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (6)$$

то это разложение единственно.

Доказательство. По условию ряд (6) сходится на интервале $(-R; R)$ и функция $f(x)$ — его сумма. Следовательно, ряд (6) можно почленно дифференцировать на интервале $(-R; R)$ любое число раз. Дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}, \\ f''(x) &= 1 \times 2a_2 + 2 \times 3a_3x + 3 \times 4a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}, \\ f'''(x) &= 1 \times 2 \times 3a_3 + 2 \times 3 \times 4a_4x + 3 \times 4 \times 5a_5x^2 + \dots \\ &\quad \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}, \\ &\quad \dots \\ f^{(n)}(x) &= n!a_n + 2 \times 3 \times 4 \dots (n+1)a_{n+1}x \end{aligned}$$

Полагая в полученных равенствах и равенстве (6) $x = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, \\ f'(0) &= 1 \times a_1, \\ f''(0) &= 2!a_2, \\ &\quad \dots \\ f^{(n)}(0) &= n!a_n, \end{aligned}$$

откуда находим

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (7)$$

Таким образом, все коэффициенты ряда (6) определяются единственным образом формулами (7), что и доказывает теорему.

Теорема доказана полностью.

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (6), получаем:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (8)$$

Ряд (8) называется **рядом Маклорена** для функции $f(x)$.

5. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Определение 1. Ряд вида

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + \\ &+ b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (1)$$

называется **тригонометрическим рядом**, а числа $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ называются **коэффициентами тригонометрического ряда**.

В отличие от степенного ряда, рассмотренного ранее, в тригонометрическом ряде вместо простейших функций $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ взяты тригонометрические функции

$$1/2, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (2)$$

которые также хорошо изучены.

Система функций (2) называется **тригонометрической системой**.

Прежде всего отметим, что все функции системы (2) являются периодическими с периодом 2π . В самом деле, постоянная $1/2$

имеет любой период, а период функций $\sin x$ и $\cos x$ ($n = 1, 2, \dots$) равен $2\pi/n$ и, следовательно, число $2\pi = n(2\pi/n)$ также является их периодом. Очевидно, что каждый член тригонометрического ряда (1) — это периодическая функция с периодом 2π . Поэтому и любая частичная сумма ряда (1) 2π — периодична (если все члены ряда не меняются от замены x на $x + 2\pi$, то и сумма его не изменится от этой замены). Отсюда следует, что если (1) сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он сходится на всей числовой прямой, а его сумма, будучи пределом последовательности периодических частичных сумм, является периодической функцией с периодом 2π . Поэтому тригонометрические ряды особенно удобны при изучении периодических функций, описывающих различные периодические процессы, которые имеют место в природе и технике. Примерами периодических процессов служат колебательные и вращательные движения различных деталей машин и приборов, периодическое движение небесных тел и элементарных частиц, акустические и электромагнитные колебания и др.

Другим важным свойством системы (2) является их ортогональность на отрезке $[-\pi, \pi]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos kx dx &= \frac{1}{2k} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos kx dx &= -\frac{1}{2k} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \text{ при } k \neq n \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx &= 0, \text{ при } k \neq n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx &= 0, \text{ при } k \neq n.\end{aligned}\quad (5)$$

Наконец

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}\quad (6)$$

что и требовалось доказать.

Ряды Фурье

Аналогично степенному ряду, для тригонометрического ряда имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (7)$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Доказательство. Интегрируя (7), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right],$$

откуда, учитывая (3), находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (8)$$

Для определения коэффициента a_k при $\cos kx$ (k — натуральное число) умножим равенство (7) на $\cos kx$ и проинтегрируем по x от $-\pi$ до π . Тогда на основании формул (3) — (6) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx \right] = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi, \end{aligned}$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx. \quad (9)$$

Аналогично, умножая равенство (7) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π , на основании тех же формул получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx \right] = b_k \pi, \end{aligned}$$

откуда находим

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (10)$$

Таким образом, коэффициенты a_0 , a_k и b_k ряда (7) определяются единственным образом формулами (8) — (10).

Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $f(x)$ — функция определенная и интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда числа a_0 , a_n и b_n , найденные по формулам (8)—(10), называются **коэффициентами Фурье**, а ряд с этими коэффициентами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) —$$

это **ряд Фурье**.

Введем понятие периодического продолжения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Будем говорить, что функция $F(x)$, определенная на всей числовой прямой и периодическая с периодом 2π , является периодическим продолжением функции $f(x)$, если на отрезке $[-\pi, \pi]$ $F(x) = f(x)$.

Очевидно, что если на отрезке $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой прямой к ее периодическому продолжению.

Установим, при каких условиях ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ и ее производная — непрерывные функции на отрезке $[-\pi, \pi]$ или же имеют на нем конечное число точек разрыва первого рода. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой прямой, причем в каждой точке $x \in (-\pi, \pi)$, в которой $f(x)$ непрерывна, сумма ряда равна $f(x)$, а в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

где $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$.

На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда равна

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

В любой точке $x \in [-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье равна $F(x)$, если x — точка непрерывности $F(x)$, и равна $\frac{F(x_0 - 0) + F(x_0 + 0)}{2}$, если x — точка разрыва $F(x)$, где $F(x)$ — периодическое продолжение $f(x)$. Теорема доказана.

Определение 3. Пусть R — некоторое множество функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ называется полной для множества R если, какова бы ни была функция $f(x) \in R$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное число функций $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \dots, \varphi_{n_k}(x)$ из данной системы и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, что

$$|f(x) - [\lambda_1 \varphi_{n_1}(x) + \lambda_2 \varphi_{n_2}(x) + \dots + \lambda_k \varphi_{n_k}(x)]| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

Заметим, что тригонометрическая система (2) заведомо не полна в множестве всех непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций в смысле определения 3.

Введем такой тригонометрический полином T_ε , что если функция $f(x)$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином T_ε , что

$$|f(x) - T_\varepsilon| < \varepsilon, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

то из условия $T_\varepsilon(\pi) = T_\varepsilon(-\pi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что $f(\pi) = f(-\pi)$.

Представление функций в виде интеграла Фурье

Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей вещественной оси. Напишем для нее интеграл, соответствующий в определенном смысле ряду Фурье, в котором суммирование по индексу n заменено интегрированием по некоторому параметру:

$$\int_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy, \quad (1)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt \, dt, \quad (2)$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin yt \, dt. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) напоминают формулы для коэффициентов ряда Фурье.

Определение 1. Интеграл (1) называется интегралом Фурье функции f .

Подставляя (2) и (3) в интеграл (1), преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] dy &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos ty \cos xy + \\ &+ \sin ty \sin xy) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях дает значение самой функции, интеграл Фурье также дает представление исходной функции.

Теорема 1. Пусть функция f кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей вещественной прямой, пусть в каждой точке x существует производная справа $f_+(x)$ и производная слева $f_-(x)$, тогда справедлива формула

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \quad (5)$$

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f в дополнение к условиям, сформулированным в теореме 1,

непрерывна во всех точках. В этом случае справедлива формула Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt,$$

и так как подынтегральная функция четная относительно переменной y , то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt. \quad (6)$$

Определение 2. Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке, если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow +\infty \\ E \rightarrow -\infty}} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x) dx, \quad \eta > 0$$

(а не предел $\lim_{\substack{\eta \rightarrow +\infty \\ E \rightarrow -\infty}} \int_{-\xi}^{\eta} \varphi(x) dx$, где ξ и η стремятся к бесконечности

независимо друг от друга, как при определении несобственного интеграла), то он называется **главным значением интеграла** $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$

и обозначается буквами vp :

$$v \times p \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi(x) dx.$$

Определение 3. Функция Φ , которая ставится в соответствие функции f формулой

$$\Phi(x) = v \times p \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy, \quad (7)$$

называется **преобразованием Фурье** функции f и обозначается $F[f]$ или $\hat{f}$.

В этом определении $f(t)$, вообще говоря, комплекснозначная функция вещественного аргумента. Отметим, что $\Phi = F[f]$ может принимать существенно комплексные значения и в том случае, когда функция f принимает только вещественные значения.

Преобразование Фурье определено, в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций.

Определение 4. Функция Φ , которая ставится в соответствие функции f формулой

$$\Phi(x) = v \times p \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy, \quad (8)$$

называется **обратным преобразованием Фурье** функции f и обозначается $F^{-1}[f]$.

Относительно обратного преобразования Фурье справедливы замечания, аналогичные тем, которые были сделаны после определения преобразования Фурье. Сам термин «обратное преобразование Фурье» оправдывается тем, что преобразование $F^{-1}[f]$ обращает преобразование Фурье $F[f]$. Более точно справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть непрерывная абсолютно интегрируемая на всей оси функция f имеет в каждой точке конечные односторонние производные, тогда

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Покажем справедливость второй формулы обращения $F[F^{-1}[f]] = f$. Поскольку косинус — четная функция, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt,$$

в силу же нечетности синуса

$$v \times p \times \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(t-x) dt = 0.$$

Поэтому имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(t-x)} dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ity} dt \right] e^{-ixy} dy,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Эта формула может быть переписана в виде:

$$F[F^{-1}[f]] = f. \quad (9)$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье), тогда, каковы бы ни были числа λ_1 и λ_2 , существует преобразование Фурье (соответственно обратное преобразование Фурье) и для функции $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, причем

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2] \quad (10)$$

(соответственно $F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2]$).

Это свойство называется **линейностью преобразования Фурье**, (соответственно обратного преобразования Фурье). Оно непосредственно следует из формул (7), (8).

Лемма 3. Преобразование Фурье, так же как и обратное преобразование Фурье, является взаимно однозначным преобразова-

нием на множестве непрерывных абсолютно интегрируемых на всей оси функций, имеющих в каждой точке односторонние производные.

Это означает, что если f_1 и f_2 — две функции указанного типа и если $F[f_1] = F[f_2]$ (соответственно, если $F^{-1}[f_1] = F^{-1}[f_2]$), то $f_1 \equiv f_2$ на всей оси.

Доказательство. Пусть $F[f_1] = F[f_2]$. Тогда в силу линейности разбienia Фурье $F[f_1 - f_2] = 0$. Поэтому по линейности F^{-1} и $F^{-1}[F[f_1 - f_2]] = 0$. Но согласно лемме 1 $F^{-1}[F[f_1 - f_2]] = f_1 - f_2$. Следовательно, $f_1 \equiv f_2$. Аналогично доказывается взаимная однозначность обратного преобразования Фурье.

Лемма доказана.

Теорема (неравенство Бесселя). Пусть $f(x)$ — функция с интегрируемым на отрезке квадратом. Тогда, если $S_n(x)$ — ее сумма Фурье порядка n , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \min_{T_n(x)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx, \quad (11)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам T_n степени не выше n .

Если a_0, a_n и $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (12)$$

называемое **неравенством Бесселя**.

Доказательство. Пусть

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

тогда, открыв квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \quad (13)$$

и используя рассуждения об ортогональности тригонометрической системы из начала параграфа, получаем:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n A_k^2 + B_k^2 \right) - \\
&- 2 \left[\frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n A_k^2 + B_k^2 \right) - 2\pi \left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k A_k + b_k B_k \right] = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2 \right] - \\
&- \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right]. \tag{14}
\end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что величина (13) принимает наименьшее значение, когда $A_0 = a_0$, $A_k = a_k$, $B_k = b_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, т. е. когда $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$.

Первое утверждение теоремы доказано.

Если $T_n(x) = S_n(x)$, то из (14) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right], \tag{15}$$

откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right] \geq 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном n . Переходя в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right] \geq 0.$$

Очевидно, что оно равносильно неравенству (12).

Теорема доказана.

Теорема (равенство Парсеваля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$ и a_0, a_n и $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ — ее коэффициенты Фурье. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2,$$

называемое **равенством Парсеваля**.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ в силу полноты в смысле среднего квадратичного системы тригонометрических функций (2) в классе непрерывных функций, принимающих одинаковые значения на концах отрезка $[-\pi, \pi]$, для функции $f(x)$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$ некоторого порядка k , что

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon. \quad (16)$$

ЛЕКЦИЯ № 5. Интегралы Лебега

В целях обобщения понятия интеграла на более широкий класс функций применяется определение интеграла, введенное в математику А. Лебегом.

Пусть на измеримом множестве E определена измеримая ограниченная функция $f(x) : m < f(x) < M$, где M и m — данные числа. Разобьем сегмент $[m, M]$, лежащий на координатной оси O_y (а не на оси O_x !), на части точками деления $m = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M$. Пусть $\alpha = \max(y_{i+1} - y_i)$.

Составим сумму:

$$S_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE(y_i \leq f < y_{i+1}),$$

где $mE(y_i \leq f < y_{i+1})$ — мера той части множества E (эта часть измерима на основании определения измеримой функции), для которой значения функции f во всех точках этой части множества подчинены неравенствам, указанным в скобках.

Составленная сумма называется **интегральной суммой Лебега**.

Определение 1. Предел интегральной суммы Лебега

$$S_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE(y_i \leq f < y_{i+1}),$$

при стремлении α к нулю называется **интегралом Лебега** функции на множестве E .

Интеграл Лебега обозначается $(L) \int_E f(x) dx$, или просто $\int_E f(x) dx$,

если же множество E есть сегмент $[a, b]$, то эти обозначения принимают вид:

$$(L) \int_a^b f(x) dx, \text{ или просто } \int_a^b f(x) dx$$

Теорема 1. Интеграл Лебега измеримой ограниченной функции $f(x)$, определенной на измеримом множестве E , по этому множеству существует.

Доказательство. Сведем вопрос о существовании интеграла Лебега к вопросу о существовании некоторого интеграла Стильеса:

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE(y_i \leq f \leq y_{i+1}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \{mE(y_{i+1} > f) - mE(y_i > f)\} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \{g(y_{i+1}) - g(y_i)\} = \int_m^M y dg(y),\end{aligned}$$

где через $g(y)$ обозначено $g(y) = mE(y > f)$. Функция $f(y) = y$, очевидно, непрерывна, а функция $g(y)$ монотонна, так как если $y_1 < y_2$, то $mE(y_1 > f) < mE(y_2 > f)$. Отсюда существование последнего предела в рассматриваемой цепи равенств на основании теоремы о существовании интеграла Стильеса (если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет на этом сегменте ограниченное изменение, то интеграл Стильеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ на $[a, b]$ существует) становится доказанным.

Чем и заканчивается доказательство теоремы о существовании интеграла Лебега.

Из доказательства теоремы следует, что класс интегрируемых по Лебегу функций так же широк, как класс ограниченных измеримых функций. Перечислим следующие свойства интеграла Лебега.

$$1. \int_E f(x) dx = 0, \text{ если } mE = 0.$$

Это очевидно, так как мера всякого подмножества $E(y_i \leq f < y_{i+1})$ также равна нулю, а значит, любая интегральная сумма Лебега равна нулю. Отсюда следует, что на величину интеграла Лебега не влияют значения, принимаемые подынтегральной функцией $f(x)$ на множестве $E_0 \subset E$ при условии $mE_0 = 0$. Такими подмножествами при интегрировании по Лебегу можно просто пренебрегать.

2. Если $A \leq f \leq B$, то $AmE \leq \int_E f(x)dx \leq BmE$.

Справедливость ее видна из рассмотрения интегральных сумм для интеграла Лебега $\int_E \varphi_i(x)dx$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) в случае $\varphi_1(x) = A$, $\varphi_2(x) = f(x)$, $\varphi_3(x) = B$.

Действительно, $\sum_{i=0}^{n-1} y_i mE(y_i \leq f \leq y_{i+1})$ для $\varphi_1(x) = A$ окажется состоящей из одного слагаемого: $y_0 mE(y \leq A < y_1)$, так как $E(y_0 \leq A < y_1) = E$, $y_0 = A$ и, таким образом, в этом случае $\int_E \varphi_1(x)dx = A \times mE$.

Аналогично $\int_E \varphi_3(x)dx = B \times mE$.

В тоже время интегральная сумма, составленная для функции $\varphi_2(x) = f(x)$, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} AmE &= \sum_{i=0}^{n-1} AmE(y_i \leq f < y_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE(y_i \leq f < y_{i+1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} BmE(y_i \leq f < y_{i+1}) = BmE. \end{aligned}$$

Переход к пределу убеждает нас в справедливости утверждения. Отсюда следует: если $f(x) = C$, то $\int_E f(x)dx = CmE$.

3. Если $E = E_1 + E_2$, где $E_1 \cap E_2 = 0$, то

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Это видно из следующих рассуждений:

$$\begin{aligned} \int_E f(x)dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \times mE(y_i \leq f < y_{i+1}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE_1(y_i \leq \\ &\leq f < y_{i+1}) + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} y_i mE_2(y_i \leq f < y_{i+1}). \end{aligned}$$

4. Если на множестве E определены такие две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, что $mE(f \neq \varphi) = 0$, то $\int_E f(x)dx = \int_E \varphi(x)dx$. Для обоснования последнего равенства обозначим $E(f \neq \varphi) = E_1$:

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \int_{E-E_1} f(x)dx + \int_{E_1} f(x)dx, \\ \int_E \varphi(x)dx &= \int_{E-E_1} \varphi(x)dx + \int_{E_1} \varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Сравнивая правые части равенства, убеждаемся в том, что первые слагаемые в них равны благодаря совпадению функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на множестве $E - E_1$, вторые слагаемые равны нулю на основании 1.

5. **Лемма.** Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то она:

- 1) интегрируема по Лебегу на сегменте;
- 2) интегралы функций на сегменте по Риману и по Лебегу равны.

Докажем справедливость этого утверждения.

Доказательство. Действительно, пусть E — множество точек разрыва функции $f(x)$ на сегменте $S = [a, b]$. Пусть мера этого множества $mE = 0$. Докажем, что в этом случае множество $M = S(f \geq A)$, представляющее собой часть сегмента S , в точках которого $f \geq A$ (A — произвольное действительное число), измеримо. Очевидно, что

$$M = \overline{M} - M'(S - M),$$

где $\overline{M}$ — замыкание множества M ;

M' — множество предельных точек множества M .

Для доказательства леммы нужно доказать только, что множество $M'(S - M)$ измеримо, так как $\overline{M}$ замкнуто, а следовательно, измеримо. Множество M , как разность двух измеримых множеств, окажется тогда множеством измеримым.

Докажем, что множество $M'(S - M)$ измеримо.

Нетрудно видеть, что $M'(S - M) \subset E$, так как всякая предельная точка M , не принадлежащая множеству M , принадлежит E .

В самом деле, пусть ξ — предельная точка M . Допустим, что в точке ξ функция $f(x)$ непрерывна. Тогда $f(\xi) < A$, и это неравенство остается справедливым для некоторой окрестности $U(\xi, \varepsilon)$ точки. Следовательно, ξ не может быть предельной для M . Отсюда, если ξ — предельная точка M , не принадлежащая ему ($f(\xi) < A$), то ξ есть точка разрыва, т. е. точка, принадлежащая E . Так как мера $mE = 0$, то всякая его часть, в том числе и $M'(S - M)$, есть измеримое множество нулевой меры.

Разобьем сегмент $[a, b]$ точками деления $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и обозначим через M_i и m_i верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда на основании 2

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq (L) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \leq M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Просуммировав по индексу i , имеем на основании 3:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq (L) \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Между теми же суммами заключен и $(R) \int_a^b f(x) dx$.

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получаем:

$$(L) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Пример

Функция Дирихле $\varphi(x)$ интегрируема по Лебегу, так как

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_I \varphi(x) dx + \int_R \varphi(x) dx,$$

где I — множество иррациональных точек сегмента $[0, 1]$;

R — множество рациональных точек сегмента $[0, 1]$.

Но $\int_I \varphi(x) dx = 0$ на основании 5, так как $\varphi(x) = 0$ на множестве I ,

$$\int_R \varphi(x) dx = 0 \text{ на основании 1, так как } mR = 0.$$

В заключение изложения теории Лебега отметим, что интеграл Лебега от характеристической функции $e(x)$ по измеримому множеству E равен лебеговой мере этого множества:

$$(L) \int_E e(x) dx = mE,$$

что непосредственно следует из рассмотрения интегральной суммы Лебега, в которой в этом случае все слагаемые обратятся в нуль, кроме одного, равного mE для любого разбиения.

Это позволяет, во-первых, установить некоторую аналогию между интегралами Римана и Лебега, а именно: жорданова мера множества связана с интегралом Римана соотношением

$$mes E = (R) \int_a^b e(x) dx,$$

а лебегова мера множества — аналогично

$$mE = (L) \int_a^b e(x) dx,$$

и, во-вторых, отметить принципиальную разницу в самом построении теории Лебега, которая никак не исчерпывается бросающимся в глаза различием в разбиении сегмента не на оси O_x , как это делается для вычисления интегральной суммы Римана, а на оси O_y .

Содержание

ЛЕКЦИЯ № 1. Математический анализ функций

одной переменной	3
1. Множества	3
2. Теорема о вложенных отрезках	4
3. Числовые последовательности	5
4. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Критерий Коши	7
5. Определение и признак сходимости монотонной последовательности	10

ЛЕКЦИЯ № 2. Функции одной переменной

1. Функции	13
2. Предел функции	15
3. Два замечательных предела	17
4. Критерий Коши существования предела функции	19
5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	21
6. Непрерывность в точке	24
7. Непрерывность на промежутке	26
8. Производная и дифференциал	30
9. Производные и дифференциалы высших порядков	34

10. Признаки монотонности, экстремумы, максимумы, минимумы, выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Асимптоты графика функции	37
11. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Правило Лопиталя	41
12. Формула Тейлора	43
13. Первообразная функция и неопределенный интеграл	47
14. Определенный интеграл	53
15. Суммы Дарбу и их свойства	59
16. Критерий интегрируемости	62
17. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона—Лейбница	63
18. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций	67
19. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	68
20. Несобственные интегралы. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости	70
ЛЕКЦИЯ №3. Функции нескольких переменных	75
1. Топология. Метрические пространства. Компактные множества в $\mathbb{R}^n$	75
2. Евклидово пространство	79
3. Функция нескольких переменных. Предел и непрерывность	84

4. Частные производные и дифференцируемость	87
5. Производная по направлению. Градиент	91
6. Частные производные и дифференциалы высших порядков	93
7. Формула Тейлора для функции двух переменных	97
8. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума	99
9. Двойной интеграл	103
10. Криволинейные интегралы	110
11. Поверхностные интегралы	112
12. Формула Грина	115
ЛЕКЦИЯ №4. Ряды	117
1. Числовые ряды	117
2. Абсолютная и условная сходимость рядов	123
3. Функциональные последовательности и ряды	125
4. Степенные ряды	134
5. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье	138
ЛЕКЦИЯ №5. Интегралы Лебега	151

Е. Б. Боронина

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Завредакцией: *А. Ю. Рагулина*
Выпускающий редактор: *М. В. Елистратова*

Формат: 84 × 108/32
Гарнитура: «Ньютон»